6. REALNE FUNKCIJE

POJAM FUNKCIJE

U nekom algebarskom, geometrijskom ili fizikalnom zadatku mogu se pojaviti dvije vrste veličina; veličine koje imaju uvijek istu vrijednost i veličine koje mogu poprimiti različite vrijednosti. Prve se nazivaju *konstantama*, druge *varijablama*.

Općenito se konstante označavaju prvim slovima alfabeta: a, b, c, ..., a varijable posljednjim: $x, y, z, \ldots$.

U matematici, ali često i u svakodnevnom životu, susrećemo se sa situacijom u kojoj **jedna** od dvije ili više varijabli, ima točno određenu vrijednost čim je dana vrijednost onih drugih.

Na primjer:

1. Označimo li sa x duljinu stranice nekog kvadrata a sa y njegovu površinu, vrijednost varijable y je potpuno određena vrijednošću varijable x, što zapisujemo, kao što je poznato, formulom:
   $$y = x^2 .$$
2. Slično, označimo li sa x i y duljine stranica nekog pravokutnika a sa z njegovu površinu, vrijednost varijable z je potpuno određena vrijednostima varijabla x i y, što zapisujemo formulom:
   $$z = x \cdot y .$$
3. Neka se automobil giba konstantnom brzinom od 60 km/h. Označimo li sa x put, u kilometrima, koji je automobil prešao, a sa y vrijeme, izraženo u satima, koliko je dugo putovao, dobit ćemo poznate formule:
   $$y = \frac{x}{60} \quad \text{i} \quad x = 60y .$$
4. Ako hipotenuza pravokutnog trokuta ima duljinu 5, duljina y jedne katete potpuno je određena vrijednošću x druge katete, tj.
   $$y = \sqrt{25 - x^2} ,$$
   ne raspravljajući na ovom mjestu za koje vrijednosti od x varijabla y poprima realne vrijednosti.

U gornjim primjerima ćemo reći da je: površina kvadrata *funkcija* duljine njegove stranice, površina pravokutnika *funkcija* duljina njegovih stranica, itd. Dakle, pomoću funkcija možemo promatrati kako se mijenja jedna veličina ovisno o drugoj i time opisati zakonitosti nekih pojava.

Današnji pojam funkcije potječe od G. L. Dirichleta (1805-1859, njemački matematičar):

Definicija
Neka su X, Y dva neprazna skupa. Ako je po nekom pravilu *f* svakom elementu $x \in X$ pridružen jedan i samo jedan element $y \in Y$ kažemo da je na skupu *X* zadana *funkcija f* sa vrijednostima u *Y*.

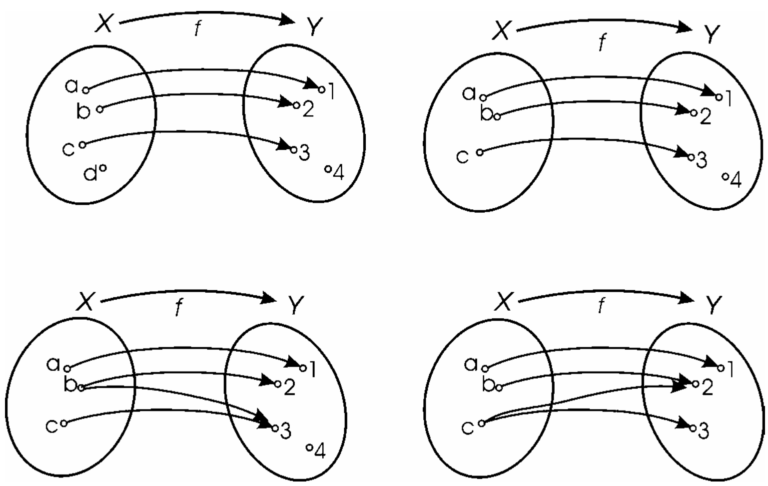
Zapisujemo: $f : X \to Y$
$x \mapsto f(x)$
$y = f(x)$

Nazivi: *X – područje definicije* ili *domena* funkcije, *X = dom f*;
Y – područje vrijednosti ili *kodomena* funkcije, *Y = kodom f*;
x – argument ili *nezavisna varijabla*, $x \in X$;
y – vrijednost funkcije ili *zavisna varijabla*, $y \in Y$;
Imf – slika funkcije *f*, $Imf = f(X) = \{f(x) \mid x \in X\} \subseteq Y$.

Funkcije označavamo slovima *f, g, h, …*.

Zadati funkciju znači zadati domenu *X*, kodomenu *Y* i pravilo (propis) *f* po kojem se vrši pridruživanje elemenata tih dvaju skupova.

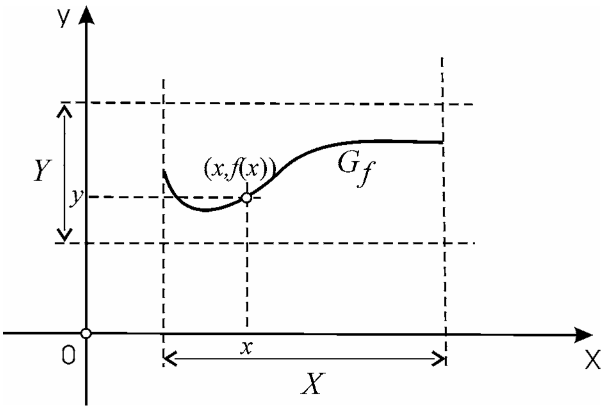
Zadatak: Koja pridruživanja dana dijagramima na slici 6-1 predstavljaju funkcije?



Sl. 6-1: Pridruženi elementi skupova *X* i *Y*

Graf funkcije

Graf G_f funkcije $f : X \to Y$ je skup točaka ravnine kojeg opisujemo na sljedeći način:
$G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subseteq X \times Y$.



Sl. 6-2: Graf G_f funkcije f

Za graf se kaže da je funkcijski u odnosu na os x ako paralela s osi y siječe graf u najviše jednoj točki, tj.

$$\left(y_1 = f(x) \;\;\&\;\; y_2 = f(x)\right) \;\Rightarrow\; y_1 = y_2 .$$

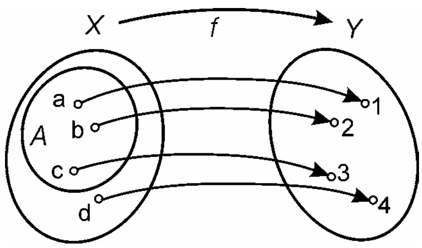
Analogno, za graf se kaže da je funkcijski u odnosu na os y ako ga paralela s osi x siječe u najviše jednoj točki, tj.

$$\left(x_1 = f(y) \;\;\&\;\; x_2 = f(y)\right) \;\Rightarrow\; x_1 = x_2 .$$

Restrikcija funkcije

$f : X \to Y$ .... dana funkcija
$A \subseteq X$

Funkcija $f_A = f\big|_A = \{f(x) \mid x \in A\}$ je *restrikcija funkcije f na skup A.*



Sl. 6-3: Dijagram restrikcije funkcije f na skup A

Proširenje funkcije

$f : X \to Y$ .... dana funkcija
$X \subseteq B$

Funkcija f_B čija je restrikcija na skup X sama funkcija f, tj. $f_B\big|_X = \{f(x) \mid x \in X\} = f$, je *proširenje funkcije f.*

Pojam injektivne i surjektivne funkcije

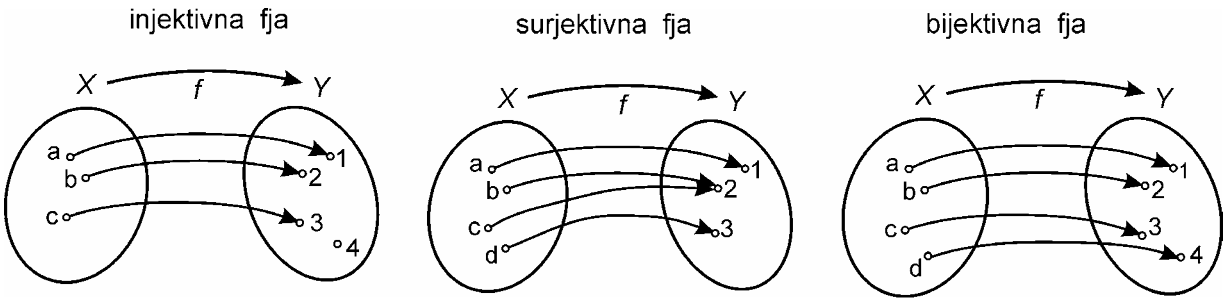
Funkcija $f : X \to Y$ je *injekcija* (injektivna funkcija, injektivno ili "1-1" preslikavanje) ako vrijedi:

$$\forall x_1, x_2 \in X, \quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2), \text{ ili ekvivalentno}$$
$$\forall x_1, x_2 \in X, \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Funkcija $f : X \to Y$ je *surjekcija* (surjektivna funkcija, surjektivno ili "na" preslikavanje) ako je $f(X) = Y$, tj. ako vrijedi da je svaki element u Y slika barem jednog elementa domene:

$$(\forall y \in Y)\ (\exists x \in X)\ y = f(x).$$

Za funkciju $f : X \to Y$ kažemo da je *bijekcija* (bijektivna funkcija, bijektivno ili "1-1" i "na" preslikavanje) ako je f istovremeno injekcija i surjekcija.



Sl. 6-4: Dijagrami funkcija

Jednakost funkcija

Neka su zadane funkcije $f_1 : X_1 \to Y_1$, i $f_2 : X_2 \to Y_2$. Kažemo da je funkcija f_1 jednaka funkciji f_2 i pišemo $f_1 = f_2$ ako vrijedi:

1. $dom\, f_1 = dom\, f_2$, tj. $X_1 = X_2$,
2. $kodom\, f_1 = kodom\, f_2$, tj. $Y_1 = Y_2$,
3. $f_1(x) = f_2(x)$, $\forall x \in X_1$, $(X_1 = X_2)$.

REALNE FUNKCIJE REALNE VARIJABLE

Promatrat ćemo uglavnom *realne funkcije realne varijable*.
Za funkciju $f : X \to Y$ kažemo da je *realna* ako je njezina kodomena podskup skupa realnih brojeva, tj. *kodom* $f = Y \subseteq \boldsymbol{R}$.
Za f kažemo da je funkcija *realne varijable* ako je njezina domena podskup skupa realnih brojeva, tj. *dom* $f = X \subseteq \boldsymbol{R}$.

Zadavanje funkcija

Funkcije zadajemo:
1. Tablicom (tabelarno); Tablica sadrži vrijednosti x i vrijednosti funkcije $f(x)$.
2. Grafom (grafički); Graf prati promjenu neke veličine npr. o vremenu.
3. Formulom:
   a) Eksplicitno;
   b) Implicitno;
   c) Parametarski.

a) Eksplicitno zadavanje funkcije

Ako je pravilo po kojem se vrijednosti npr. od y dobivaju *direktno* za odbrani x, kažemo da je y zadan kao *eksplicitna* funkcija od x.

Zapis: $y = f(x)$

Na primjer: $y = 1 - x^2$, $y = \dfrac{1}{x-1}$, $y = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x+\frac{1}{2}}$.

Postavljamo pitanje da li su gornjim formulama zadane funkcije?
Ako je funkcija zadana formulom i ako nema dodatnih uvjeta, podrazumijeva se:
- područje vrijednosti (kodomena) je skup realnih brojeva i
- područje definicije (domena) je skup svih onih realnih brojeva za koje dana formula ima smisla, tj. propisane operacije u formuli daju određenu realnu vrijednost.
  Tako određeno područje definicije zovemo i *prirodna domena* funkcije.
  Oznaka: *dom* f ili $D(f)$.

Dakle, gornjim formulama su dane funkcije $f : X \to \boldsymbol{R}$, $X \subseteq \boldsymbol{R}$.

Primjer. $f(x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x+\frac{1}{2}}$, $D(f) = ?$

1°)
$$1 - x^2 \geq 0$$
$$x^2 \leq 1 \, / \sqrt{\ }$$
$$|x| \leq 1 \iff -1 \leq x \leq 1$$

2°)
$$x + \frac{1}{2} \neq 0$$
$$x \neq -\frac{1}{2}$$

Domenu zadane funkcije čini skup svih realni brojeva koji zadovoljvaju prvi i drugi uvjet, tj.

$$D(f) = [-1,1] \setminus \left\{ -\frac{1}{2} \right\}.$$

Zadatak: Odrediti prirodnu domenu zadanih funkcija.

a) $y = \dfrac{x}{(x-2)(x-5)}$,

b) $y = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$,

c) $y = log(2x-3)$,

d) $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}$.

b) Implicitno zadavanje funkcije

Funkcija je zadana *implicitno* ako je dana jednadžba koja sadržava varijable x i y, pa se iz nje y određuje rješavanjem jednadžbe, za zadani x ili obratno. Prebace li se svi članovi na lijevu stranu jednadžbe, ona prima oblik $F(x, y) = 0$, gdje je lijeva strana neki izraz koji sadržava x i y.

$F(x, y) = 0$ je opći oblik implicitno zadane funkcije.

Primjeri:

1. $2x - 3y - 6 = 0$; O kojoj se funkciji/ama radi?

a) $2x - 3y - 6 = 0 \Rightarrow y = \dfrac{2}{3}x - 2$.

Dakle, skup $K = \{ (x, y) \mid 2x - 3y - 6 = 0 \} \subset \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}$ je funkcijski.

b) $2x - 3y - 6 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{3}{2}y + 3$.

Skup $K = \{ (y, x) \mid 2x - 3y - 6 = 0 \} \subset \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}$ je funkcijski.

2. a) $x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 - 1 = 0 \Rightarrow y^2 = 1 - x^2 \Rightarrow \begin{cases} y = +\sqrt{1-x^2} \\ y = -\sqrt{1-x^2} \end{cases}.$

b) $x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 - y^2 \Rightarrow \begin{cases} x = +\sqrt{1-y^2} \\ x = -\sqrt{1-y^2} \end{cases}.$

Skup $K = \{ (x, y) \mid x^2 + y^2 = 1 \} \subset \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}$ nije funkcijski, ali se mogu izdvojiti potskupovi koji to jesu:

$K_1 = \left\{ \left(x, \sqrt{1-x^2}\right) \mid x^2 + y^2 = 1 \right\} \subset \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}$ i $K_2 = \left\{ \left(x, -\sqrt{1-x^2}\right) \mid x^2 + y^2 = 1 \right\} \subset \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}$,

odnosno,

$K_3 = \left\{ \left(y, \sqrt{1-y^2}\right) \mid x^2 + y^2 = 1 \right\} \subset \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}$ i $K_4 = \left\{ \left(y, -\sqrt{1-y^2}\right) \mid x^2 + y^2 = 1 \right\} \subset \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}$.

c) Funkcije zadane parametarski

Funkcija $y = f(x)$ zadana je u *parametarskom obliku*, ako su x i y zadani u eksplicitnom obliku kao funkcije neke pomoćne varijable t, koju zovemo parametrom, tj.

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \quad t \in I \subseteq \boldsymbol{R}.$$

Svakoj vrijednosti $t \in I$ odgovara par vrijednosti x, y, odnosno jedna točka ravnine: $(\varphi(t), \psi(t))$.

Primjeri:

1. Napisati parametarsku jednadžbu pravca $y = ax + b$.

$$\begin{cases} x = t \\ y = at + b \end{cases}, \quad t \in \boldsymbol{R}, \qquad \text{ili} \qquad \begin{cases} x = t - 1 \\ y = a(t-1) + b = at + (b-a) \end{cases}, \quad t \in \boldsymbol{R}, \qquad \text{itd.}$$

2. Parametarska jednadžba kružnice:

$$\begin{cases} x = r\,cos\,t \\ y = r\,sin\,t \end{cases}, \quad t \in [0,\ 2\pi].$$

Kvadriranjem i zbrajanjem tih dviju jednadžbi slijedi njen implicitni oblik: $x^2 + y^2 = r^2$, a odavde eksplicitni: $y_{1,2} = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$.

3. Parametarska jednadžba elipse:

$$\begin{cases} x = a\,cos\,t \\ y = b\,sin\,t \end{cases}, \quad t \in [0,\ 2\pi].$$

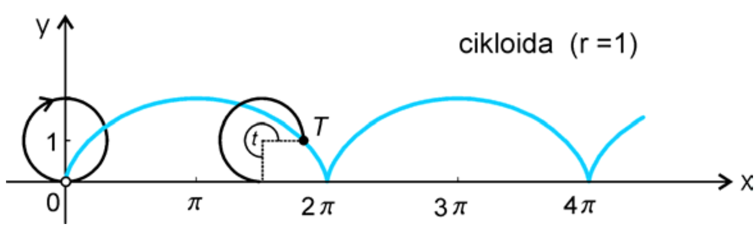
Kvadriranjem i zbrajanjem tih dviju jednadžbi slijedi njen implicitni oblik: $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$, a

odavde eksplicitni: $y_{1,2} = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$.

4. Parametarska jednadžba *cikloide*:

$$\begin{cases} x = r\,(t - sin\,t) \\ y = r\,(1 - cos\,t) \end{cases}, \quad t \in [0,\ 2\pi].$$

Cikloida je krivulja koju opisuje točka kružnice polumjera r kad se kružnica kotrlja po pravcu bez klizanja, pri čemu je t – kut za koji se zarotirala kružnica.



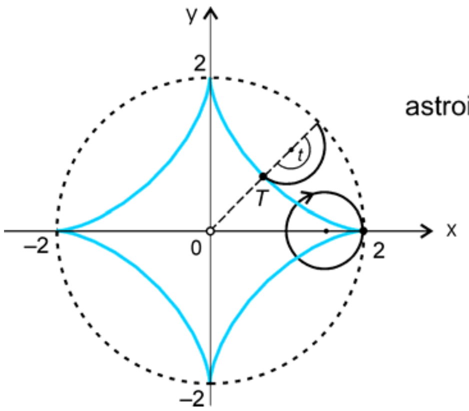
Sl. 6-5

5. Parametarska jednadžba *astroide*:

$$\begin{cases} x = a\cos^3 \dfrac{t}{4} \\ y = a\sin^3 \dfrac{t}{4} \end{cases}, \quad t \in [0,\ 8\pi].$$

Astroida je krivulja koju opisuje točka kružnice kad se kružnica kotrlja po drugoj kružnici pri čemu je omjer m polumjera fiksne i rotirajuće kružnice jednak 4.

a - polumjer fiksne kružnice
b - polumjer rotirajuće kružnice
t – kut za koji se zarotirala kružnica
$\dfrac{a}{b} = m$ - omjer polumjera fiksne i rotirajuće kružnice



Sl. 6-6

Općenito, ako se kružnica kotrlja izvana → *epicikloida*, ako se kotrlja iznutra → *hipocikloida.*
Napomena: Implicitna jednadžba astroide (koja se dobije eliminacijom parametra t) glasi
$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

Algebarske operacije s funkcijama

Neka su zadane dvije funkcije $f, g : X \to \boldsymbol{R}$, i neka je $r \in \boldsymbol{R}$. Tada su
$f+g,\ f-g,\ f\cdot g,\ \dfrac{f}{g}\ \left(g(x) \neq 0,\ \forall x \in X\right),\ rf$ nove funkcije iz X u $\boldsymbol{R}$ definirane formulama:

1. $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, *zbroj* funkcija;
2. $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$, *razlika* funkcija;
3. $(f\cdot g)(x) = f(x)\cdot g(x)$, *produkt* funkcija;
4. $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, *kvocijent* funkcija;
5. $(rf)(x) = rf(x)$, *umnožak funkcije brojem.*

Monotonost funkcije

Neka je

$$f : X \to \boldsymbol{R}, \quad X \subseteq \boldsymbol{R}.$$

Ako vrijedi

$\forall x_1, x_2 \in X, \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2),$ f je *strogo rastuća* funkcija;

$\forall x_1, x_2 \in X, \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2),$ f je *rastuća* funkcija;

$\forall x_1, x_2 \in X, \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2),$ f je *strogo padajuća* funkcija;

$\forall x_1, x_2 \in X, \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2),$ f je *padajuća* funkcija.

Za funkciju f kažemo da je *monotona* ako je rastuća ili padajuća, odnosno *strogo monotona* ako je strogo rastuća ili strogo padajuća funkcija.

Funkcija $f : X \to \boldsymbol{R}$ je po dijelovima monotona ako se svaki konačni interval iz domene može rastaviti na konačno mnogo intervala na kojima je funkcija f monotona.

Napomena: Veza stroge monotonosti i injektivnosti funkcije!

Parnost i neparnost funkcije

Neka je $f : X \to \boldsymbol{R}$, gdje je domena X simetrična s obzirom na ishodište koordinatnog sustava, tj. $x \in domf \Rightarrow -x \in domf$.

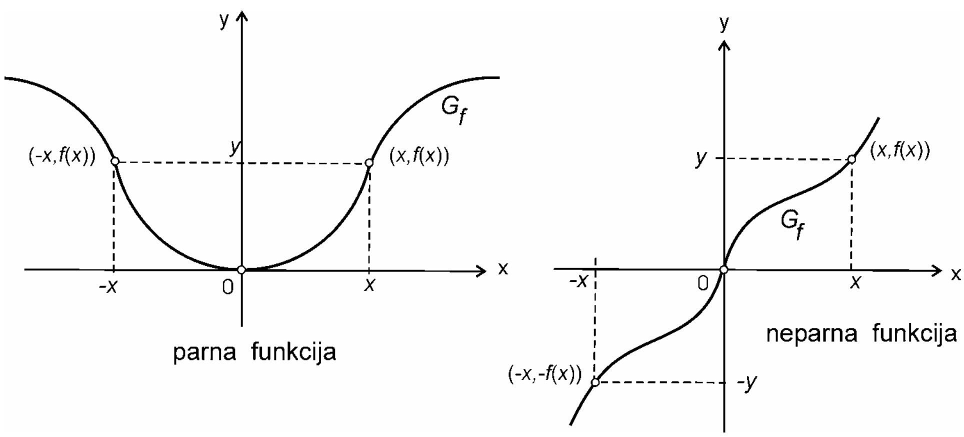
Za funkciju f kažemo da je *parna* ako je

$$f(x) = f(-x), \qquad \forall x \in X,$$

odnosno *neparna* ako je

$$f(-x) = -f(x), \qquad \forall x \in X.$$

Slijedi da je graf parne funkcije simetričan s obzirom na os y, a da je graf neparne funkcije centralno simetričan s obzirom na ishodište koordinatnog sustava.



Sl. 6-7

Omeđenost funkcije

Funkcija $f : X \to \boldsymbol{R}$, $X \subseteq \boldsymbol{R}$ je *omeđena* (ograđena ili ograničena) ako je slika funkcije $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$ omeđena, tj. ako postoje brojevi $m, M \in \boldsymbol{R}$ takvi da je

$$m \leq f(x) \leq M, \qquad \forall x \in X .$$

Graf funkcije f se nalazi između pravaca $y = m$ i $y = M$.

Periodične funkcije

Funkcija $f : X \to \boldsymbol{R}$, $X \subseteq \boldsymbol{R}$, je *periodična* ako postoji broj $p \in \boldsymbol{R}$, $p \neq 0$ takav da je

$$f(x) = f(x + k \cdot p), \quad k \in Z .$$

Broj p zovemo *period* funkcije f.

Primjer:

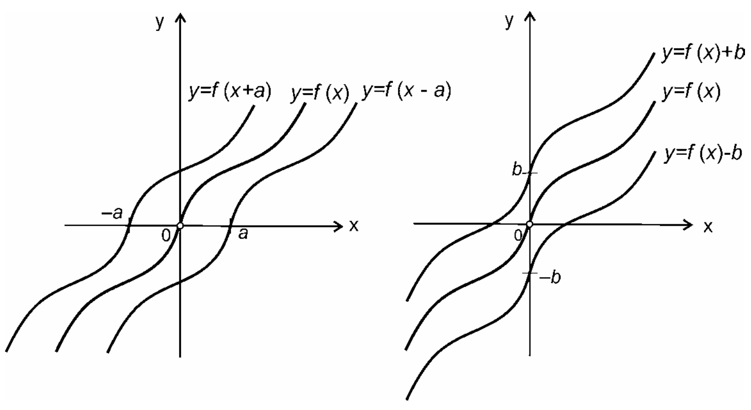
$y = \sin x$, period $p = \frac{2\pi}{1} = 2\pi \quad \Rightarrow \quad \sin x = \sin(x + k \cdot 2\pi)$,

$y = \sin(nx)$, period $p = \frac{2\pi}{n} \quad \Rightarrow \quad \sin(nx) = \sin\left(n\left(x + k \cdot \frac{2\pi}{n}\right)\right)$.

Linearne transformacije grafa

Neka je dana funkcija $y = f(x)$ i neka nam je poznat njen graf $G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in X\}$.
Kako konstruirati graf funkcije $y = \alpha f(\beta x + a) + b$ iz zadanog grafa funkcije $y = f(x)$?

- Graf funkcije $y = f(x + a)$, $a > 0$ ($a < 0$), dobiva se iz grafa funkcije $y = f(x)$ njegovom translacijom ulijevo (udesno), duž osi x, za vrijednost $|a|$.
- Graf funkcije $y = f(x) + b$, $b > 0$ ($b < 0$), dobiva se iz grafa funkcije $y = f(x)$ njegovom translacijom duž osi y u pozitivnom smjeru (u negativnom smjeru), za vrijednost $|b|$.



Sl. 6-8: Neke linearne transformacije grafa

- Točke grafa funkcije $y = f(\beta x)$, dobivaju se zamjenom točke $(x_0, y_0) \in G_f$ točkom $\left(\frac{x_0}{a}, y_0\right)$. Mogućnosti su sljedeće:

  a) $\beta = -1$ $\Rightarrow$ simetrija s obzirom na os y;

  b) $|\beta| > 1$ $\Rightarrow$ skupljanje (suženje) grafa G_f $|\beta|$ puta u smjeru osi x.
  U slučaju da je β negativan transformacija je praćena i simetrijom s obzirom na os y;

  c) $|\beta| < 1$, $\beta \neq 0$ $\Rightarrow$ rastezanje (proširenje) grafa G_f $|\beta|$ puta u smjeru osi x.
  U slučaju da je β negativan transformacija je praćena i simetrijom prema osi y.

- Slično prethodnom, za dobivanje grafa funkcije $y = \alpha f(x)$, mogućnosti su sljedeće:

  a) $\alpha = -1$ $\Rightarrow$ simetrija s obzirom na os x;

  b) $|\alpha| > 1$ $\Rightarrow$ rastezanje (proširenje) grafa G_f $|\alpha|$ puta u smjeru osi y.
  U slučaju da je α negativan transformacija je praćena i simetrijom s obzirom na os x;

  c) $|\alpha| < 1$, $\alpha \neq 0$ $\Rightarrow$ skupljanje (suženje) grafa G_f $|\alpha|$ puta u smjeru osi y.
  U slučaju da je α negativan transformacija je praćena i simetrijom prema osi x.

- Do grafa funkcije $y = \alpha f(\beta x + a) + b$ dolazimo kombinacijom gornjih postupaka.

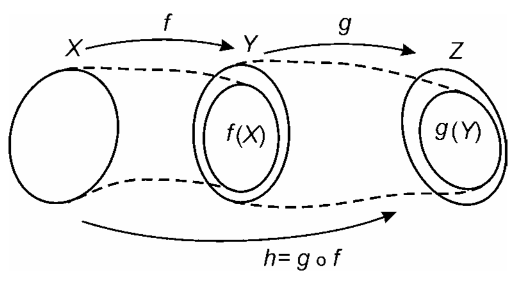
KOMPOZICIJA FUNKCIJA

Kompozicija funkcija ili slaganje funkcija je najopćenitija, najprirodnija i najvažnija operacija nad funkcijama!

Definicija
Neka su X, Y neprazni skupovi i neka su $f : X \to \boldsymbol{R}$, $g : Y \to \boldsymbol{R}$ funkcije zadane na X odnosno Y sa vrijednostima u R. Ako je slika funkcije f sadržana u skupu Y, tj. $f(X) \subseteq Y$ tada je sa

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)), \qquad \forall x \in X$$

dana funkcija $h : X \to \boldsymbol{R}$ koja se naziva *kompozicija* funkcija f i g.



Sl. 6-9: Kompozicija funkcija f i g

Primjer: Odrediti kompozicije $g \circ f$, $f \circ g$ funkcija $f(x) = \dfrac{x+2}{x-1}$ i $g(x) = \dfrac{x}{x-1}$.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{x+2}{x-1}\right) = \frac{\dfrac{x+2}{x-1}}{\dfrac{x+2}{x-1} - 1} = \cdots = \frac{x+2}{3},$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{x}{x-1}\right) = \frac{\dfrac{x}{x-1} + 2}{\dfrac{x}{x-1} - 1} = \cdots = 3x - 2.$$

Napomena: općenito je $g \circ f \neq f \circ g$.

Zadatak: Odrediti tražene kompozicije zadanih funkcija.

$$f(x) = x^4, \quad g(x) = \sqrt{x}, \quad h(x) = \frac{1}{1+x^2};$$

$$g \circ f = ?, \quad f \circ g = ?, \quad g \circ h = ?, \quad h \circ g = ?, \quad h \circ g \circ f = ?$$

Teorem

Neke su dane funkcije $f : X_1 \to X_2$, $g : X_2 \to X_3$, $h : X_3 \to X_4$ i neka su definirane kompozicije $h \circ g$, $(h \circ g) \circ f$, $g \circ f$, $h \circ (g \circ f)$. Tada vrijedi:

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

Dokaz.

Budući da je $f(X_1) \subseteq X_2$, a funkcija g je definirana na X_2, kompozicija $g \circ f$ je dobro definirana. Analogno za ostale.

Provjerimo dalje da vrijedi:

$$[(h \circ g) \circ f](x) = [h \circ (g \circ f)](x), \quad \forall x \in X_1.$$

Prema definiciji kompozicije,

$$[(h \circ g) \circ f]\,(x) = (h \circ g) f(x) = h\,(g\,(f(x))), \text{ odnosno}$$

$$[h \circ (g \circ f)](x) = h((g \circ f)(x)) = h(g\,(f(x))). ☻$$

INVERZNA FUNKCIJA

Neka je $f : X \to Y$ injektivna funkcija, tj.

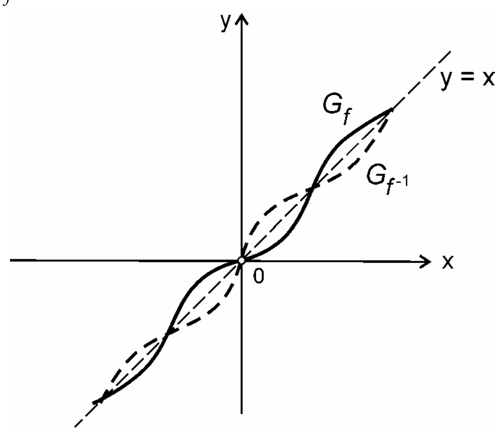
$$\forall x_1, x_2 \in X\,,\quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \quad \vee \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2\,.$$

Promatramo li graf funkcije *f*, zbog gornje formule je on funkcijski s obzirom na os *x* i s obzirom na os *y*. Zbog toga možemo definirati novu funkciju koja elementima iz $f(X)$ pridružuje elemente iz *X*.

Definicija
Neka je $f : X \to Y$ injektivna funkcija. Svakom elementu $y \in f(X)$ pridružimo jednoznačno element $x \in X$ koji se s *f* preslikava u *y* i označimo ga $x = f^{-1}(y)$. Ovako definiranu funkciju $f^{-1} : f(X) \to X$ nazivamo *inverznom funkcijom* funkcije *f*.
Ako je *f* bijekcija, onda je $f(X) = Y$, pa je $f^{-1} : Y \to X$.
Napomena: Graf funkcije dane formulom $y = f(x)$ i graf funkcije dane formulom $x = f^{-1}(y)$, kad *y* primi sve vrijednosti iz $f(X)$, se podudaraju, tj. oni su isti skup točaka u ravnini $\left(G_f \equiv G_{f^{-1}}\right)$. Međutim, uobičajeno je da se kod crtanja grafa argument (nezavisna varijabla) funkcije označi sa *x*, pa tako za inverznu funkciju f^{-1} imamo:

$$G_{f^{-1}} = \left\{ \left(x, f^{-1}(x)\right) \,\middle|\, x \in f(X) \right\}.$$

Slijedi da su grafovi G_f i $G_{f^{-1}}$ simetrični s obzirom na pravac $y = x$. Vidi sliku 6-10!



Sl. 6-10: Grafovi funkcija *f* i f^{-1}

Iz definicije inverzne funkcije slijedi da je ispunjeno:

1. $\left(f^{-1} \circ f\right)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x$, tj.
   $\left(f^{-1} \circ f\right) = i_x$, gdje je i_x identitata na *x*,

2. $\left(f \circ f^{-1}\right)(y) = f\left(f^{-1}(y)\right) = f(x) = y$, tj.
   $\left(f \circ f^{-1}\right) = i_y$, gdje je i_y identitata na *y*,
   a osim toga je ispunjeno i
3. Ako su *f, g* dvije funkcije, $g \circ f$ njihova kompozicija, tada vrijedi:
   $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Teorem
Neka je $f : X \to \boldsymbol{R}$, $X \subseteq \boldsymbol{R}$ strogo monotona funkcija. Tada vrijedi:
1) *f* ima inverznu funkciju f^{-1};
2) Ako *f* strogo raste na domeni *X*, onda f^{-1} strogo raste na $f(X)$;
3) Ako *f* strogo pada na domeni *X*, onda f^{-1} strogo pada na $f(X)$.

Dokaz.
Ad 1)
f je strogo monotona funkcija $\Rightarrow$
$(\forall x_1, x_2 \in X)\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ ili $(\forall x_1, x_2 \in X)\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$,
odakle slijedi injektivnost funkcije *f*, čime je tvrdnja dokazana.

Ad 2)
Tvrdimo: $(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)) \Rightarrow y_1 < y_2 \Rightarrow f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$.
Pretpostavimo suprotno: $(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)) \Rightarrow y_1 < y_2 \;\&\; f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2)$.

$$f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2) \quad / \circ f$$

$$f\left(f^{-1}(y_1)\right) \geq f\left(f^{-1}(y_2)\right) \Rightarrow y_1 \geq y_2,$$ što je suprotno pretpostavci.

Dakle, tvrdnja je istinita.

Ad 3) Analogno prethodnom. ☻

Teorem
Ako za funkciju $y = f(x)$ postoji inverzna funkcija $y = g(x)$, ona je jedinstvena.

Dokaz.
Pretpostavimo suprotno, tj. da postoje barem dva inverza. Neka su to funkcije g_1 i g_2 za koje vrijedi:

$$g_1 \neq g_2,\quad (g_1 \circ f) = i_x,\quad (f \circ g_1) = i_y, \text{ odnosno } (g_2 \circ f) = i_x,\quad (f \circ g_2) = i_y. \quad (*)$$

Želimo dokazati da je $\forall y \in Y,\quad g_1(y) = g_2(y)$.
Upotrebom jednakosti sadžanih u (*), slijedi:

$$g_1(y) = i_x(g_1(y)) = (i_x \circ g_1)(y) = ((g_2 \circ f) \circ g_1)(y) = (g_2 \circ (f \circ g_1))(y) =$$
$$= (g_2 \circ i_y)(y) = g_2(i_y(y)) = g_2(y),$$

čime je tvrdnja dokazana. ☻

Zadatak: Odrediti inverzne funkcije danih funkcija.

a) $f(x) = x - 5$, b) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 1}$, c) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$, d) $f(x) = log_2 x$.

Ad b)

$y = \sqrt[3]{x^2 + 1}$

Zamijenimo mjesta varijablama x i y $\Rightarrow$ $x = \sqrt[3]{y^2 + 1}$

Izrazimo y kao funkciju od x $\Rightarrow$ $x = \sqrt[3]{y^2 + 1} \big/ ^3$

$$x^3 = y^2 + 1$$

$$y^2 = x^3 - 1$$

$$y_{1,2} = \pm\sqrt{x^3 - 1}$$

Slika grafa zadane funkcije i dobivenih inverznih funkcija: