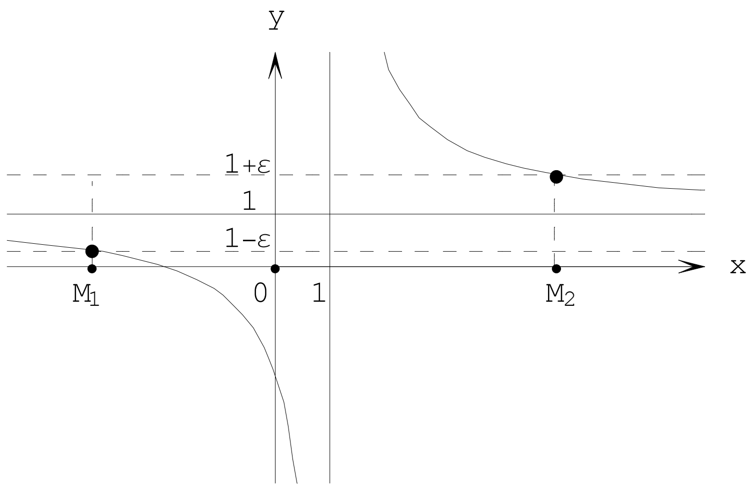
9. GRANIČNA VRIJEDNOST I NEPREKIDNOST FUNKCIJE

GRANIČNA VRIJEDNOST ILI LIMES FUNKCIJE

Granična vrijednost funkcije kad $x \to \infty$

Primjer: $f(x) = \dfrac{x+2}{x-1}$, $D(f) = R \setminus \{1\}$



Kako se ponaša funkcija kad $x \to \infty$?
Kako god odabrali $\varepsilon -$prugu uvijek postoje neki brojevi M_1, $M_2 \in R$ od kojih su nadalje sve vrijednosti u pruzi oko 1.

Definicija
Broj A zovemo *graničnom vrijednošću ili limesom* funkcije f kad $x \to \infty$, ako za svaki $\varepsilon > 0$ možemo naći broj M takav da za svaki x veći od M vrijedi $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Pišemo: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$

Čitamo: "Limas funkcije $f(x)$, kad x teži u ∞, je A."

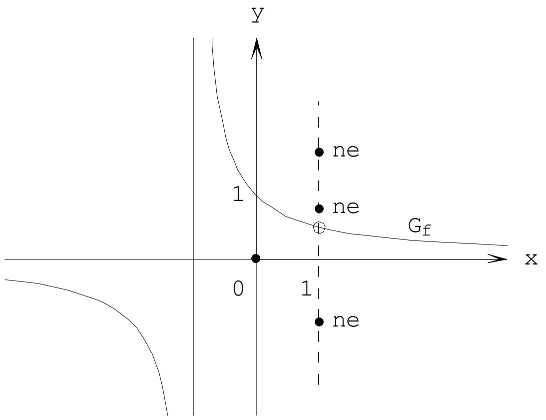
Formulom: $(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists M \in R)\,(\forall x > M \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon)$

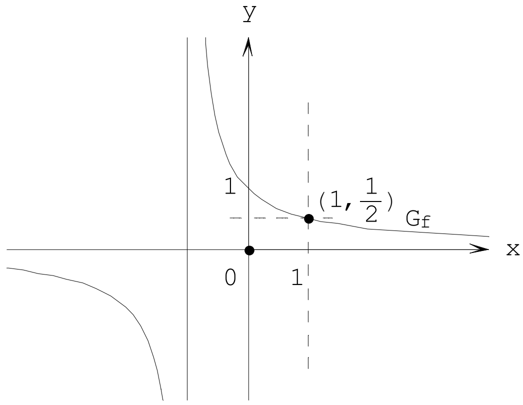
Zadaci: Izračunati limese sljedećih funkcija kad $x \to \infty$.

1. $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $D(f) = ?$, $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x} = ?$
2. $f(x) = \dfrac{3x-2}{9x+7}$, $D(f) = ?$, $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x-2}{9x+7} = ?$

Granična vrijednost (limes) funkcije kad $x \to x_0$

Primjer: $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-1}$, $D(f) = R \setminus \{-1,1\}$ $g(x) = \dfrac{1}{x+1}$, $D(f) = R \setminus \{-1\}$

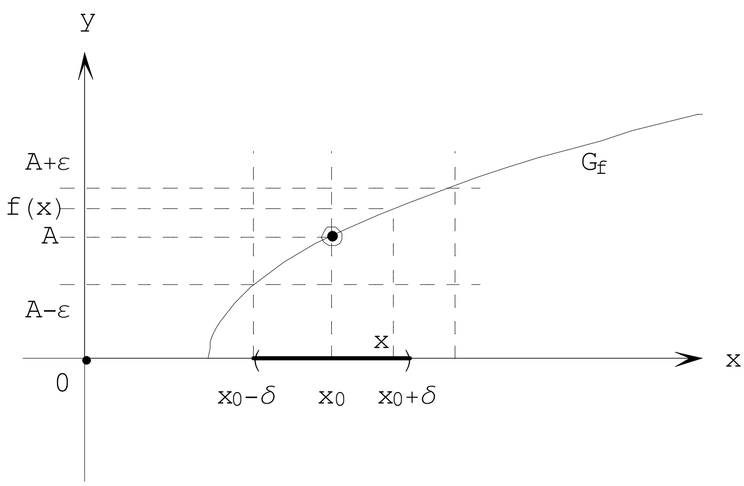




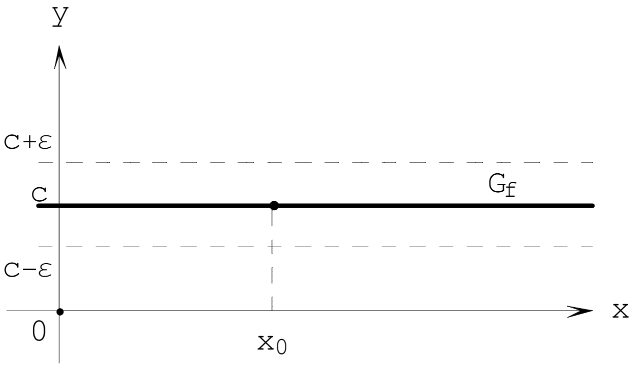
Kako se ponaša funkcija kad $x \to x_0$?
Možemo li proširiti funkciju *f* tako da bude prirodno definirana i u točki x_0=1?
Dakle, funkcija je defirinana na intervalu (*a,b*) osim možda u točki $x_0 \in (a,b)$. Zanima nas ponašanje funkcije oko te točke.
Jedna od mogućnosti dana je sa:

Definicija
Broj *A* zovemo *graničnom vrijednošću ili limesom* funkcije *f* u točki x_0 ako za svaki $\varepsilon > 0$ možemo naći broj $\delta > 0$ takav da čim je $|x - x_0| < \delta$ vrijedi $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Pišemo: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$
Čitamo: "Limas funkcije $f(x)$, kad *x* teži x_0, je *A*."
Formulom: $(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \delta > 0)\ (|x - x_0| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - A| < \varepsilon)$



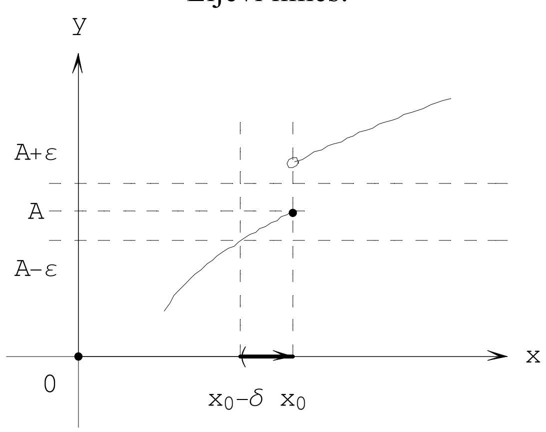
Primjer.
Pokazati da konstantna funkcija $f(x)=c, \ x \in R,$ ima limes c kad $x \to x_0$, tj.
$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} c = c$.



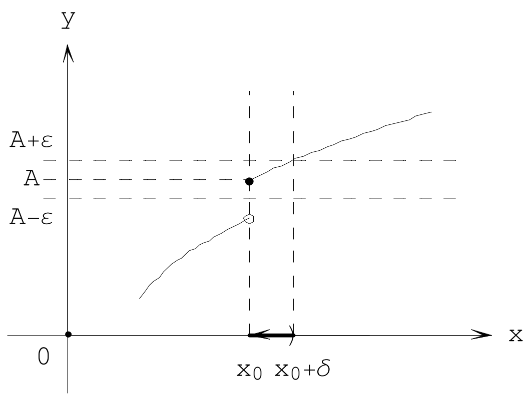
Odaberimo $\varepsilon > 0$. Tražimo $\delta > 0$.
Prema gornjoj formuli mora biti $|f(x) - A| < \varepsilon$.
Međutim, $|f(x) - A| = |c - c| = \underline{0 < \varepsilon}$, odakle zaključujemo da gornja nejednakost vrijedi za $\forall \varepsilon > 0$. Možemo na primjer uzeti da je $\varepsilon = \delta$, čime je tvrdnja dokazana. □

Definicija (Lijevi i desni limes)

Lijevi limes:



Desni limes:



Neka je f realna funkcija defirinana na intervalu (a,b) osim možda u točki $x_0 \in (a,b)$. Kažemo da

(1) f ima *lijevi limes* (*limes slijeva*) A u točki x_0 i pišemo $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = A$ ili $\lim\limits_{x \to x_0^{-0}} f(x) = A$

ako vrijedi
$(\forall \varepsilon > 0) \ (\exists \delta > 0) \ \left(x_0 - \delta < x < x_0 \ \Rightarrow \ |f(x) - A| < \varepsilon\right);$

(2) f ima *desni limes* (*limes sdesna*) A u točki x_0 i pišemo $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A$ ili $\lim\limits_{x \to x_0^{+0}} f(x) = A$

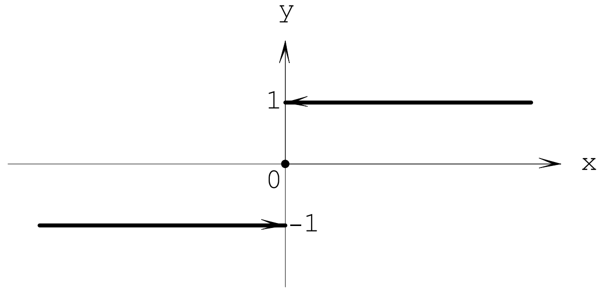
ako vrijedi
$(\forall \varepsilon > 0) \ (\exists \delta > 0) \ \left(x_0 < x < x_0 + \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - A| < \varepsilon\right).$

Napomena: Ako funkcija ima lijevi i desni limes u nekoj točki i oni su jednaki, to je upravo limes te funkcije za tu vrijednost argumenta.

Primjeri:

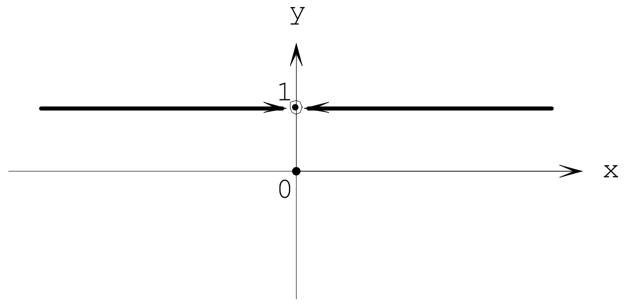
1. Odrediti lijevi i desni limes funkcije $f(x)=\frac{x}{|x|}$, u $x_0=0$.

   Slika:



2. Odrediti lijevi i desni limes funkcije $f(x)=\frac{x}{x}$, u $x_0=0$.

   Slika:



Svojstva limesa

Teorem (Računanje s limesima)
Neka su f i g realne funkcije definirane na otvorenom intervalu $(a,b)\backslash\{x_0\}$, $x_0\in(a,b)$, takve da imaju limes u x_0 i neka je broj $\lambda\in R$. Tada:

1. $f\pm g$ ima limes u x_0 i $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]\pm\lim\limits_{x\to x_0}[g(x)]$;
2. $f\cdot g$ ima limes u x_0 i $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]\cdot\lim\limits_{x\to x_0}[g(x)]$;
3. λf ima limes u x_0 i $\lim\limits_{x\to x_0}[\lambda f(x)]=\lambda\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]$;
4. $\frac{f}{g}$ ima limes u x_0 i $\lim\limits_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]}{\lim\limits_{x\to x_0}[g(x)]}$, $\left(\lim\limits_{x\to x_0}[g(x)]\neq 0,\ \ g(x)\neq 0\right)$;
5. $|f|$ ima limes u x_0 i $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=\left|\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]\right|$.

Dokaz
Vidi dokaz za nizove brojeva (poglavlje 8).□

Teorem (Usklađenost limesa i relacije ≤)
Neka su f, g i h tri realne funkcije definirane na otvorenom intervalu (a,b) osim možda u točki $x_0 \in (a,b)$. Tada vrijedi:

(1) Ako f i g imaju limes u točki x_0 i ako $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) < \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$,
onda postoji $\delta > 0$ takav da za $\forall x \in (a,b),\ \ x \neq x_0,\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < g(x)$,
tj. znak nejednakosti vrijedi i na nekom intervalu oko točke x_0;

(2) Ako f i g imaju limes u točki x_0 i ako je $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \neq x_0$ iz neke okoline točke x_0, onda je $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \leq \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$;

(3) "Teorem o sendviču"
Ako f i g imaju limes A u točki x_0 i ako je $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$, $\forall x \neq x_0$, iz neke okoline točke x_0, onda i funkcija h ima limes u x_0 i vrijedi $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = A$.

Dokaz
Vidi slični dokaz za nizove brojeva ili vidi dokaz u: Kurepa, Matematička analiza III, str. 54.

Nepravi limes
Za limes kažemo da je *nepravi* ako funkcija raste (pada) preko svih granica kad se x približava nekoj točki, tj.

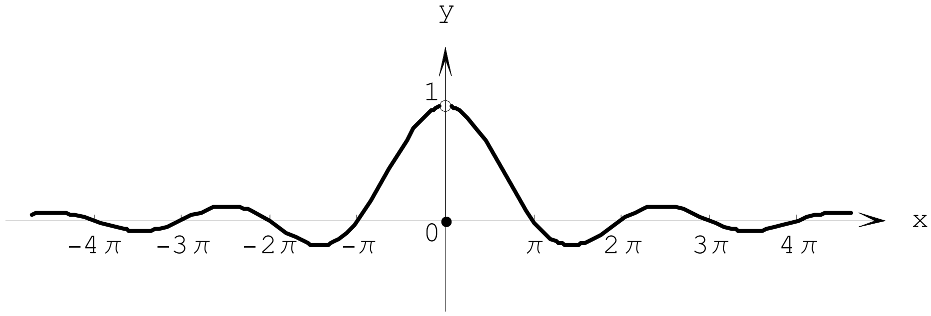
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \ \text{ ili } \ -\infty; \qquad \lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty \ \text{ ili } \ -\infty.$$

Zadaci:

1. Odrediti prirodnu domenu i izračunati limes funkcije:
   a) $f(x) = \dfrac{3x-2}{9x+7}$, $\quad \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = ?$
   b) $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{4x^3 - 1}$, $\quad \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = ?$
   c) $f(x) = \dfrac{2x^3}{x^2 + 1}$, $\quad \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = ?$
   d) $f(x) = \dfrac{4 - x^2}{3 - \sqrt{x^2 + 5}}$, $\quad \lim\limits_{x \to 2} f(x) = ?$

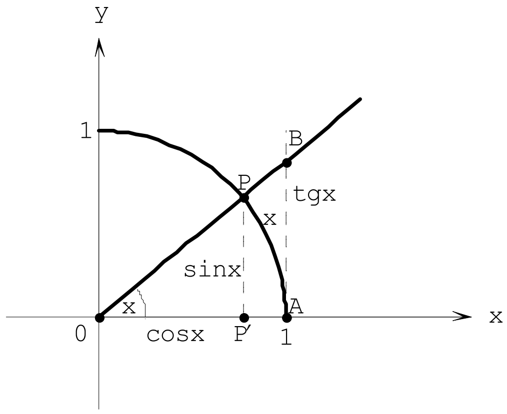
2. Dokazati da funkcija $f(x)=\dfrac{sin\,x}{x}$ ima limes kad $x\to 0$ i da vrijedi $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sin\,x}{x}=1$.

Graf funkcije $f(x)=\dfrac{sin\,x}{x}$:



(Napomena: Mjerila po osi x i osi y su međusobno različita.)

Tražimo proširenje $\tilde{f}(x)=\begin{cases}\dfrac{sin\,x}{x}, & x\neq 0\\ A\ , & x=0\end{cases}$; $\quad A=?$



Iz slike čitamo:

$$P_1(\Delta\, OP'P)=\frac{sin\,x\;cos\,x}{2},$$

$$P_2(\sphericalangle\, OAP)=\frac{1\cdot x}{2},$$

$$P_3(\Delta\, OAB)=\frac{1\cdot tgx}{2}.$$

Vrijedi:

$P_1<P_2<P_3$, tj.

$$\frac{sin\,x\;cos\,x}{2}<\frac{x}{2}<\frac{tgx}{2}\ ,\quad \left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)\Big/ : \frac{sin\,x}{2}>0$$

$$cos\,x<\frac{x}{sin\,x}<\frac{1}{cos\,x}. \qquad (*)$$

Recipročno,

$$\frac{1}{cos\, x} > \frac{sin\, x}{x} > cos\, x\,,$$

pa prema “teoremu o sendviču”, slijedi

$$\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{1}{cos\, x}}_{=1} > \lim_{x\to 0}\frac{sin\, x}{x} > \underbrace{\lim_{x\to\infty} cos\, x}_{=1} \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{x\to 0}\frac{sin\, x}{x} = 1\,.$$

Preostaje nam provjeriti dobiveni rezultat za x iz intervala $\left(-\frac{\pi}{2} < x < 0\right)$:

$$-\frac{\pi}{2} < x < 0 \;\Rightarrow\; sin\, x < 0 \Big/ \cdot(-1)$$

$$0 < -x < \frac{\pi}{2} \qquad \Rightarrow \qquad cos(-x) < \frac{-x}{sin(-x)} < \frac{1}{cos(-x)}$$

$$\Rightarrow \qquad cos\, x < \frac{x}{sin\, x} < \frac{1}{cos\, x}$$, tj relacija (*). □

3. Pokazati da je

   a) $f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$, $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$,

   b) $f(x) = \left(1+\frac{a}{x}\right)^{x}$, $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{x} = e^{a}$,

   c) $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$, $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.

   Dokaz vidi u: Javor, Matematička analiza 1, str.99.

4. Izračunati sljedeće limese:

   a) $\lim_{x\to 0} x\cdot ctgx$,

   b) $\lim_{x\to 0}\frac{sin\, 5x}{sin\, 2x}$,

   c) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$,

   d) $\lim_{x\to 0}\frac{cos\, 3x - cos\, 2x}{x^2}$.

5. Mnoge granične vrijednosti koje su u vezi s brojem e računaju se na temelju sljedeće tvrdnje:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x) = A > 0 \quad \& \quad \lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} g(x) = B \;\Rightarrow\; \lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} [f(x)]^{g(x)} = A^{B}\,.$$

Ako je A^B nedefinirano (npr. 1^∞), limes svodimo na oblik koji koristi definiciju broja *e*.

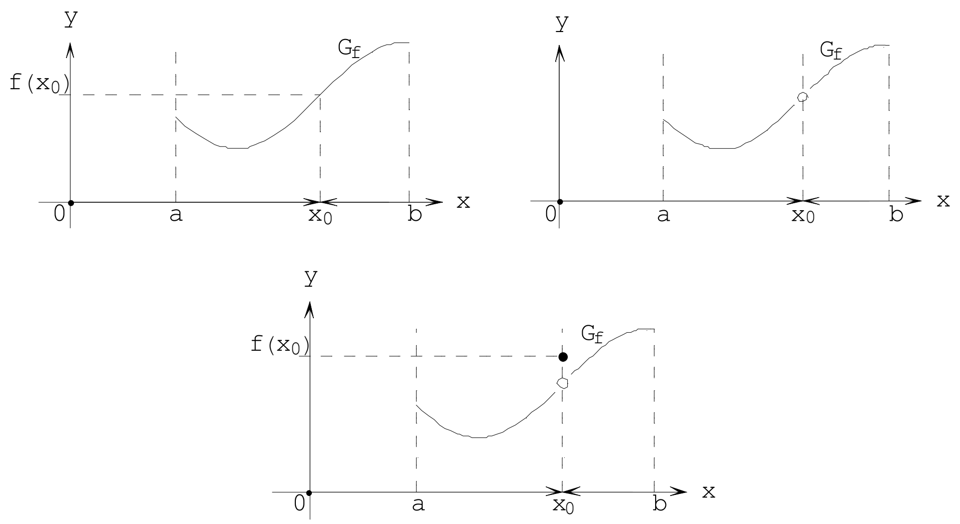
Na primjer,

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x+1}\right)^x = \left(1^\infty\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x+1}+1-1\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x+1}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{2}}\right]^{\frac{2}{x+1}\cdot x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{2}}\right]^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{x+1}} = e^2 .$$

NEPREKIDNOST FUNKCIJE

Definicija neprekidnosti (neprekinutosti) funkcije



Razmisli o gornjim slučajevima. Koju od funkcija bismo mogli smatrati neprekidnom i zašto?

Grubo govoreći, funkcija je neprekidna na intervalu (a,b) ako graf možemo nacrtati ne dižući olovku s papira.

Definicija 1
Za funkciju f kažemo da je *neprekidna u točki* $x_0 \in (a,b)$ ako vrijedi:

(1) Postoji $f(x_0)$;

(2) Postoji $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$;

(3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Primjer. Provjeriti neprekidnost funkcije $y = x^2 + 1$ u točki $x_0 = 2$.

(1) $f(x_0) = f(2) = 5$;

(2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} x^2 + 1 = 5$

(3) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, tj. 5 = 5. □

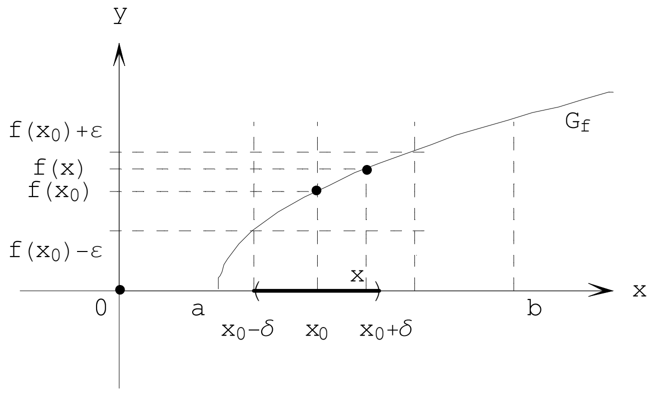
Definicija 2

Funkcija f je *neprekidna u točki* $x_0 \in (a,b)$ ako

$$(\forall \varepsilon > 0)\ \ (\exists \delta(\varepsilon) > 0)\ \ \left(|x - x_0| < \delta\ \Rightarrow\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\right).$$

Funkcija f je *neprekidna na skupu* $S \subseteq (a,b)$ ako je neprekidna u svakoj točki $x_0 \in S$.

Grafički prikaz gornje definicije:



Definicija 3

Funkcija f ima *prekid u točki* $x_0 \in (a,b)$ ako

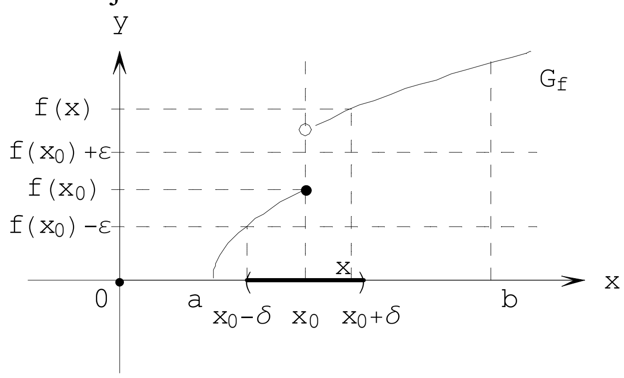
$$(\exists \varepsilon > 0)\ (\forall \delta > 0)\ (\exists x_\delta)\ \left(|x_\delta - x_0| < \delta\ \ \&\ \ |f(x_\delta) - f(x_0)| \geq \varepsilon\right).$$

(Podsjetimo se: $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow A \,\&\, \neg B$)

Kažemo da funkcija f ima *prekid u točki* x_0 ako nije neprekidna u x_0, tj. nije ispunjen jedan ili više uvjeta neprekidnosti.

Kažemo da funkcija f ima *prekid na skupu* S ako postoji bar jedna točka $c \in S$ u kojoj f ima prekid.

Grafički prikaz gornje definicije:



Postupak utvrđivanja neprekidnosti u točki

1. Uzmemo proizvoljan $\varepsilon > 0$ i promatramo interval $(f(c)-\varepsilon, f(c)+\varepsilon)$;
2. Tražimo $\delta > 0$ takav da $|x-c| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(c)| < \varepsilon$.

Napomene:
1. Ako tvrdnja vrijedi za neko $\varepsilon > 0$ i $\delta > 0$ $\Rightarrow$ vrijedi za svako $\varepsilon' > \varepsilon$, tj. $|x-c| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(c)| < \varepsilon'$.
2. Ako tvrdnja vrijedi za neko $\varepsilon > 0$ i $\delta > 0$ $\Rightarrow$ vrijedi za svako $0 < \delta' < \delta$, tj. $|x-c| < \delta' < \delta \Rightarrow |f(x)-f(c)| < \varepsilon$.

Kao primjer, pokazati da vrijedi:
1. Konstanta je neprekidna funkcija na *R*.
2. Identiteta je neprekidna na *R*.
3. $f(x) = 3x+1$, neprekidna na *R*.
4. $f(x) = \sqrt{x}$, neprekidna u točki $x = 1$.
5. $f(x) = \sqrt{x+4}$, neprekidna na intervalu $(-4, +\infty)$.
6. $f(x) = x^2$, neprekidna u točki $x = 2$.

Svojstva neprekidnih funkcija u točki

Teorem
Neka su $f, g : (a,b) \longrightarrow R$ neprekidne funkcije u točki $c \in (a,b)$. Tada su sljedeće funkcije neprekidne u točki c:

(1) $f \pm g$,

(2) $f \cdot g$,

(3) λf, za $\forall \lambda \in R$,

(4) $\dfrac{f}{g}$, ako je $g(x) \neq 0,\ \forall x \in (a,b)$,

(5) $|f|$.

Dokaz
Vidi dokaz za računanje s limesima funkcija.

Posljedice teorema
Neka su $f_1, \ldots, f_n : (a,b) \longrightarrow R$ neprekidne funkcije u točki $c \in (a,b)$. Tada su sljedeće funkcije neprekidne u točki c:

(1) $f_1 + f_2 + \ldots + f_n$,

(2) $f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_n$,

(3) $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_n f_n$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n \in R$, i

(4) polinomi su neprekidne funkcije na R.

Neprekidne funkcije na segmentu

Definicija 1

Neka je $I = [a,b]$ i $f: I \longrightarrow R$. Kažemo da je funkcija f *neprekidna na I* ako postoji otvoreni interval $\tilde{I} = (\tilde{a}, \tilde{b})$ i neprekidna funkcija $\tilde{f}: \tilde{I} \to R$ takva da je

(1) $I \subset \tilde{I}$,

(2) $\tilde{f}(x) = f(x), \quad \forall x \in I$.

Definicija 2

Funkcija je *neprekidna na segmentu* $I = [a,b]$ ako je neprekidna *u svakoj točki* intervala (a,b).

Teorem (Bolzano-Weierstrass)

Neka je f: [a,b] $\longrightarrow R$ neprekidna funkcija na segmentu [a,b]. Tada vrijedi:

(1) f je ograničena na [a,b];

(2) Postoje $m, M \in R$ i $x_m, x_M \in [a,b]$ takvi da je

$m \leq f(x) \leq M$, $\forall x \in I$,

$m = f(x_m)$, $M = f(x_M)$,

tj. neprekidna funkcija na segmentu dostižesvoj minimum i maksimum;

(3) Za svako $C \in (m, M)$ postoji bar jedno $c \in (a,b)$ tako da je $C = f(c)$, tj. neprekidna funkcija na segmentu postiže sve međuvrijednosti;

(4) Ako je $f(a) < 0$ *i* $f(b) > 0$ (ili obratno), tada postoji bar jedno $c \in (a,b)$ tako da je $f(c) = 0$.

Dokaz vidi u Javor, Matematička analiza 1, str.110-112.

Vrste prekida funkcije

(1) PREKID PRVE VRSTE funkcije f u točki $x = x_0$ znači da postoji konačni lijevi i konačni desni limes. Ako su osim toga i jednaki, tj.

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x),$$

prekid zovemo UKLONJIVIM. Tada je $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

(2) PREKID DRUGE VRSTE: Svi ostali prekidi, tj. ne postoji jedan ili oba limesa ili je jedan beskonačno ili su to oba.

Zadaci: Odrediti točke prekida danih funkcija.

1. $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$, $\quad D(f)=?$

   $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=?,\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=?$

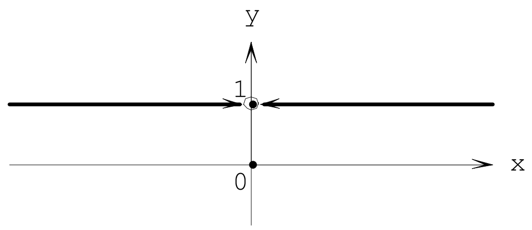
2. $f(x)=\dfrac{x}{x}$, $\quad D(f)=?$

   $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=?,\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=?$

3. $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$, $\quad D(f)=?$

   $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=?,\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=?$

Slika uz zadatak 2:



Slika uz zadatak 3: