10. DERIVACIJA

Pojam derivacije

Glavne ideje koje su vodile do današnjeg shvaćanja derivacije razvile su se u 17 stoljeću, kada i započinje razvoj *infinitezimalnog računa* (*diferencijalnog i integralnog računa*). Najvažnija imena na tom području bila su:
- Isaac Newton (1642-1727), engleski fizičar i matematičar;
- Gotfried Wilhelm Leibnitz (1646-1716), njemački matematičar.

Svaki je od njih došao do pojma derivacije, ali različitim putem, rješavajući različiti problem.

1°) Newton je rješavao **fizikalni problem** (problem brzine): Kako definirati brzinu gibanja nekog tijela u zadanom trenutku t_0?

Neka je:

$s = s(t)$ …prijeđeni put kao funkcija vremena, i

$\overline{v} = \dfrac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$ … prosječna brzina na intervalu $[t_0, t_0 + \Delta t]$.

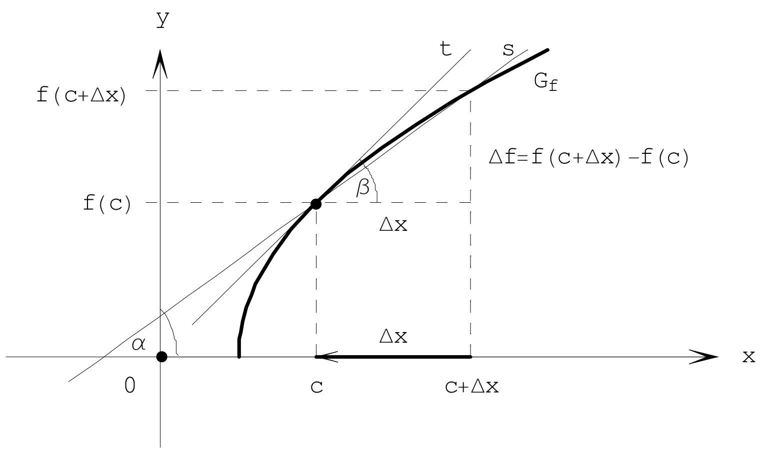
Što je Δt manji, prosječna brzina $\overline{v}$ je "vjernija", tj. bliža brzini "u trenutku". Zbog toga ima smisla definirati

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}.$$

2°) Leibnitz je rješavao **geometrijski problem** (problem tangente): Kako konstruirati, odrediti, tangentu na danu krivulju u nekoj točki?

Neka je $y = f(x)$ funkcija čiji je graf promatrana krivulja.

Koeficijent smjera sekante točkama $(c, f(c))$, $(c + \Delta x, f(c + \Delta x))$: $tg\beta = \dfrac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x}$.



Što je Δx manji sekanta je bliža tangenti. Odavde slijedi da koeficijent smjera tangente u točki $(c, f(c))$ ima smisla definirati sa

$$tg\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x}.$$

Definicija
Neka je $I \subseteq R$ otvoren interval i $f : I \to R$ realna funkcija. Ako je $c \in I$ i $\Delta x \in R$ tako da vrijedi $c + \Delta x \in I$, onda broj

$$\Delta f = f(c+\Delta x) - f(c)$$

zovemo *prirast* (promjena) *funkcije f*. Često pišemo $f(c+\Delta x) = f(c) + \Delta f$.

Definicija
Neka je $I \subseteq R$ otvoren interval, $f : I \to R$ zadana realna funkcija i $c \in I$. Kažemo da je funkcija *f derivabilna* (sinonim:diferencijabilna) *u točki* $c \in I$ ako postoji limes

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x}.$$

U protivnom kažemo da *f nije derivabilna* (nije diferencijabilna) u točki *c*.
Realni broj

$$f'(c) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x}$$

zovemo *derivacija funkcije f u točki c* i označavamo $f'(c)$, $Df(c)$ ili $\frac{df(c)}{dx}$.
Kažemo da je *f derivabilna na I*, gdje je *I* otvoren interval, ako je ona derivabilna u svakoj točki $c \in I$. Tada možemo definirati novu funkciju

$$f' : I \to R, \quad x \mapsto f'(x),$$

koju zovemo *prva derivacija* funkcije *f*.
Ako f' ima derivaciju u nekoj točki $c \in I$, onda vrijednost

$$f''(c) = (f')'(c)$$

zovemo *druga derivacija* funkcije *f* u točki *c*. Analogno definiramo $f'''(c)$.
Induktivno možemo definirati *n-tu derivaciju* funkcije *f* u točki *c*:

$$f^{(n)}(c) = (f^{(n-1)})'(c), \quad n \in N.$$

Primjer: Odrediti po definiciji derivacije danih funkcija.

1. $f(x) = c$;
2. $f(x) = x^3$;
3. $f(x) = \sqrt{x}$;
4. $f(x) = \frac{1}{x}$;
5. $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$;
6. $f(x) = ln\, x$.

Ad 2)

$f(x) = x^3$, $f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^3$,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} = \cdots = 3x^2.$$

Ad 4)

$f(x) = \frac{1}{x}$, $f(x + \Delta x) = \frac{1}{x + \Delta x}$,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x}}{\Delta x} = \cdots = -\frac{1}{x^2}.$$

Teorem

Neka je $I \subseteq R$ otvoren interval i funkcija $f : I \to R$ derivabilna u točki $c \in I$. Tada je *f* neprekidna u točki *c*.

Obrat ne vrijedi!

Dokaz se može naći u: Javor, Matematička analiza 1, str.128.

Primjeri:

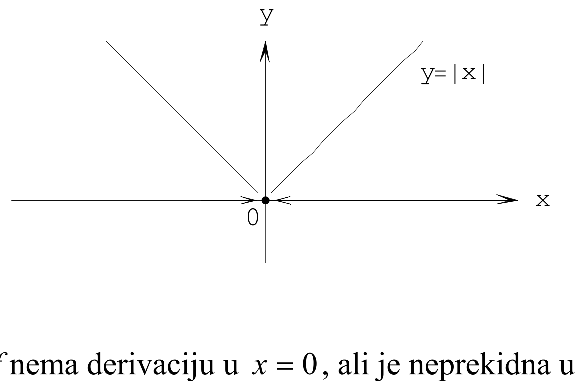
1. $f : R \to R,\ f(x) = |x|$ - neprekidna funkcija.

   Izračunajmo derivaciju u točki $x = 0$.

   $$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

   $f'(0) = ?$

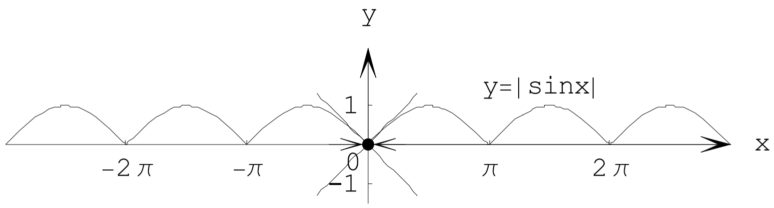
   $$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(0 + x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x} = ?$$



$$\Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1 \\ \lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1 \end{cases} \Rightarrow f \text{ nema derivaciju u } x = 0, \text{ ali je neprekidna u } x = 0.$$

2. $f : R \to R,\ f(x) = |\sin x|$ - neprekidna funkcija.
Promatramo derivacije u nultočkama funkcije: $x = k\pi,\ \ k \in Z$.
Na primjer, izračunajmo derivaciju u točki $x = 0$.
$f'(0) = ?$

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(0+x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{|\sin x| - |\sin 0|}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{|\sin x|}{x} = ?$$



$$\Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{|\sin x|}{x} = -\left|\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}\right| = -1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{|\sin x|}{x} = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad f'(0) \text{ ne postoji.}$$

Diferencijal funkcije

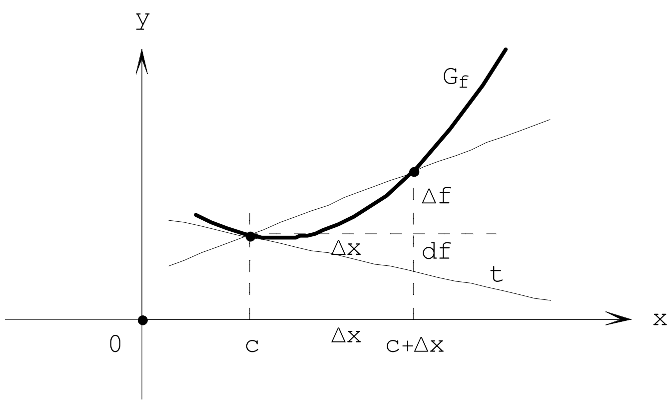
Neka je $I \subseteq R$ otvoren interval, $f : I \to R$ funkcija i $c \in I$. Pretpostavimo da postoji $f'(c)$, tj. postoji

$$f'(c) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x}.$$

To znači da se za malo Δx kvocijent $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ malo razlikuje od $f'(c)$, pa možemo pisati

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(c) + \underbrace{\varepsilon(\Delta x)}_{\varepsilon \text{ ovisi o } \Delta x} \quad \Longrightarrow \quad \Delta f = f'(c)\cdot \Delta x + \varepsilon(\Delta x)\cdot \Delta x \quad \& \quad \lim_{\Delta x\to 0} \varepsilon(\Delta x) = 0.$$

Dakle, ako postoji $f'(c)$ promjena funkcije se može zapisati kao $\Delta f = f'(c)\cdot \Delta x + \varepsilon \cdot \Delta x$.



Obratno, ako se promjena funkcije *f* u točki *c* može zapisati u obliku

$$\Delta f = A \cdot \Delta x + \varepsilon \cdot \Delta x \quad \& \quad \lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon = 0, \quad A \in R,$$

onda postoji derivacija funkcije *f* u točki *c* i $f'(c) = A$.

Slijedi:
Za malo Δx je i $\varepsilon(\Delta x)$ malo (funkcija i tangenta se malo razlikuju), pa možemo Δf aproksimirati sa $f'(c) \cdot \Delta x$, tj.

$$\Delta f = f'(c) \cdot \Delta x + \underbrace{\varepsilon \cdot \Delta x}_{\text{zanemarujemo}} \approx f'(c) \cdot \Delta x .$$

Definicija
Diferencijal funkcije *f* u točki *c* je funkcija *df* definirana sa

$$\underline{d f = f'(c) \cdot \Delta x .}$$

Upotrijebimo li

$$d x = x' \cdot \Delta x = \Delta x ,$$

$$\Longrightarrow \quad d f = f'(c) \cdot d x , \text{ tj. } \frac{d f}{d x} = f'(c),$$

$$\Longrightarrow \quad \underline{\Delta f \approx d f .}$$

Primjer: Izračunati približno $\sqrt{38}$ pomoću diferencijala.

Upotrijebit ćemo $\Delta f \approx d f$.

$$f(c + \Delta x) - f(c) \approx f'(c) dx ,$$

$$f(c + \Delta x) \approx f'(c) dx + f(c).$$

U našem slučaju,

$$\left.\begin{aligned} & f(x) = \sqrt{x}, \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ & c = 36 \quad \Rightarrow \quad f(c) = \sqrt{36} = 6 \\ & \qquad\qquad\quad f'(c) = \frac{1}{12} \\ & \Delta x = 2 \quad \Rightarrow \quad f(c + \Delta x) = f(36 + 2) = f(38) = ? \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \sqrt{38} \approx \frac{1}{12} \cdot 2 + 6 = \frac{37}{6}.$$

Zadaci:
1. Izračunati približno $\sin 50^\circ$ pomoću diferencijala.
2. Izračunati diferencijal funkcije $f(x) = \frac{3}{4} x^2 + 2x - 1$.

Pravila deriviranja

Teorem (Derivacija zbroja, razlike, produkta i kvocijenta)
Ako funkcije *f* i *g* imaju derivacije u točki *x*, onda vrijedi:

(1) $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$;

(2) $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$;

(3) $(\lambda f)'(x) = \lambda \cdot f'(x), \quad \lambda \in R$;

(4) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{\left[g(x)\right]^2}, \quad g(x) \neq 0$.

Dokaz
Ad 2)

$$(f \cdot g)'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(f \cdot g)(x + \Delta x) - (f \cdot g)(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) \cdot g(x+\Delta x) - f(x) \cdot g(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) \cdot g(x+\Delta x) - f(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g(x+\Delta x) - f(x) \cdot g(x+\Delta x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \cdot g(x+\Delta x) + \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \cdot f(x) \right] = f'(x) g(x) + g'(x) f(x)$$

Slično se provjeravaju ostali slučajevi. □

Teorem (Derivacija kompozicije funkcija)
Neka su funkcije *f* i *g* takve da postoji funkcija $h = f \circ g$. Ako funkcija *g* ima derivaciju u točki *x*, a funkcija *f* u točki $g(x)$, onda funkcija $f \circ g$ ima derivaciju u točki *x* i vrijedi

$$\underline{(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)} \qquad \text{- } \textit{lančano pravilo.}$$

Dokaz

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x+\Delta x) - h(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\left[g(x+\Delta x)\right] - f\left[g(x)\right]}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\left[g(x+\Delta x)\right] - f\left[g(x)\right]}{\Delta x} \cdot \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{g(x+\Delta x) - g(x)} =$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ g(x+\Delta x) \to g(x)}} \frac{f\left[g(x+\Delta x)\right] - f\left[g(x)\right]}{g(x+\Delta x) - g(x)} \cdot \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} = f'(g(x)) \cdot + g'(x). \ \square$$

<u>Specijalni slučaj kompozicije:</u>
Ako je $g = f^{-1}$, onda je $f^{-1} \circ f = id_x$, tj. $\left(f^{-1} \circ f\right)(x) = f^{-1}(f(x)) = x$.

Prema lančanom pravilu slijedi

$$\left(f^{-1}\circ f\right)'(x)=(x)',$$

$$\left(f^{-1}\right)'\left(f(x)\right)\cdot f'(x)=1 \quad\Longrightarrow\quad \left(f^{-1}\right)'\underbrace{\left(f(x)\right)}_{=y}=\frac{1}{f'(x)},\quad f'(x)\neq 0.$$

Ovime je dokazan teorem koji slijedi:

Teorem (Derivacija inverzne funkcije)
Ako je f strogo monotona i neprekidna funkcija na otvorenom intervalu $I\subseteq R$ i ako f ima u točki $x\in I$ derivaciju $f'(x)\neq 0$, onda njena inverzna funkcija f^{-1} ima derivaciju u točki $y=f(x)$ i vrijedi

$$\left(f^{-1}\right)'(y)=\frac{1}{f'(x)}.\ \square$$

Primjeri:

1. $\left.\begin{array}{l} f(x)=e^x \\ y=e^x \Leftrightarrow x=ln\,y \end{array}\right\} \Rightarrow\ f^{-1}(y)=ln\,y\ \Rightarrow\ \left(f^{-1}\right)'(y)=\dfrac{1}{f'(x)}=\dfrac{1}{e^x}=\dfrac{1}{y}.$

2. $\left.\begin{array}{l} f(x)=x^2 \\ y=x^2 \Leftrightarrow x=\sqrt{y} \end{array}\right\} \Rightarrow\ f^{-1}(y)=\sqrt{y}\ \Rightarrow\ \left(f^{-1}\right)'(y)=\dfrac{1}{f'(x)}=\dfrac{1}{2x}=\dfrac{1}{2\sqrt{y}}.$

Derivacije elementarnih funkcija

(1) Polinomi

$$f(x)=c\ \Rightarrow\ f'(x)=0,$$

$$f(x)=x^n,\quad n\in N,\quad f'(x)=?$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^n-(x)^n}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left[(x+\Delta x)-x\right]\left[(x+\Delta x)^{n-1}+(x+\Delta x)^{n-2}x+(x+\Delta x)^{n-3}x^2+\cdots+x^{n-1}\right]}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left[(x+\Delta x)^{n-1}+(x+\Delta x)^{n-2}x+(x+\Delta x)^{n-3}x^2+\cdots+x^{n-1}\right]=nx^{n-1}.$$

$\Rightarrow \left(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\right)'=na_nx^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+\cdots+a_1$, tj. derivacija polinoma je polinom.

(2) Racionalne funkcije

$f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$, gdje su p i g polinomi

$f'(x)=\dfrac{p'(x)\cdot q(x)-q'(x)\,p(x)}{\left[q(x)\right]^2}$, tj. derivacija racionalne funkcije je racionalna funkcija.

(3) Eksponencijalna funkcija

$f(x)=a^x,\quad 0<a\neq 1$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^x\cdot a^{\Delta x}-a^x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^x\left(a^{\Delta x}-1\right)}{\Delta x}$$

$$=\left\{\begin{array}{l} y=a^{\Delta x}-1\ \Rightarrow\ \Delta x=\dfrac{ln(y+1)}{ln\,a} \\ \Delta x\to 0\ \Leftrightarrow\ y\to 0\end{array}\right\}=\lim_{\psi\to 0}\frac{a^x\cdot y}{\dfrac{ln(y+1)}{ln\,a}}=a^x\,ln\,a\lim_{\psi\to 0}\frac{1}{\dfrac{1}{y}ln(y+1)}=$$

$$=a^x\,ln\,a\lim_{\psi\to 0}\frac{1}{\dfrac{1}{y}ln(y+1)}=a^x\,ln\,a\frac{1}{\lim\limits_{\psi\to 0}ln(y+1)^{\frac{1}{y}}}=a^x\,ln\,a\frac{1}{ln\underbrace{\left(\lim\limits_{\psi\to 0}(y+1)^{\frac{1}{y}}\right)}_{=e}}=a^x\,ln\,a,$$

$$\underline{\left(a^x\right)'=a^x\,ln\,a\,.}$$

$\Rightarrow$ Derivacija eksponencijalne funkcije eksponencijalna je funkcija.

(4) Logaritamska funkcija

$f(x)=log_a\,x,\quad 0<a\neq 1$

Logaritamska funkcija je inverzna eksponencijalnoj: $y=a^x \Leftrightarrow x=log_a\,y$.

Prema pravilu za derivaciju inverzne funkcije, slijedi

$$\left(log_a\,y\right)'=\frac{1}{\left(a^x\right)'}=\frac{1}{a^x\,ln\,a}=\frac{1}{a^{log_a y}\,ln\,a}=\frac{1}{y\,ln\,a},\ \text{tj.}$$

$$\underline{\left(log_a\,y\right)'=\frac{1}{y\,ln\,a}.}$$

(5) Opća potencija

$f(x)=x^c,\quad c\in R\quad\Rightarrow\quad f(x)=e^{c\,ln\,x}$

Prema pravilu za derivaciju kompozicije funkcija, slijedi

$$f'(x)=e^{c\,ln\,x}\cdot c\cdot\frac{1}{x}=x^c\cdot c\cdot\frac{1}{x}=cx^{c-1},\ \text{tj.}$$

$$\underline{\left(x^c\right)'=cx^{c-1}.}$$

(6) Trigonometrijske funkcije

a) $f(x) = sin\,x$,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{sin(x+\Delta x) - sin\,x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\,cos\frac{x+\Delta x + x}{2}\,sin\frac{x+\Delta x - x}{2}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \frac{sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = cos\,x \cdot 1 = cos\,x, \text{ tj.}$$

$$\underline{(sin\,x)' = cos\,x}.$$

b) $f(x) = cos\,x$,

$$\underline{(cos\,x)' = -sin\,x}.$$

c) $f(x) = tgx = \dfrac{sin\,x}{cos\,x}$,

$$f'(x) = \frac{cos\,x \cdot cos\,x - sin\,x \cdot (-sin\,x)}{cos^2 x} = \frac{1}{cos^2 x}, \text{ tj.}$$

$$\underline{(tgx)' = \frac{1}{cos^2 x}}.$$

d) $f(x) = ctgx = \dfrac{cos\,x}{sin\,x}$,

$$\underline{(c\,tgx)' = -\frac{1}{sin^2 x}}.$$

Zadatak: Izvesti derivacije funkcija *cos i ctg*.

(7) Ciklometrijske funkcije

Deriviraju se prema pravilu za derivaciju inverznih funkcija.

a) $f(y) = arc\,sin\,y$, $\quad x = arc\,sin\,y \Leftrightarrow y = sin\,x, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$,

$$f'(y) = \frac{1}{(sin\,x)'} = \frac{1}{cos\,x} = \frac{1}{\sqrt{1 - sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, \text{ tj.}$$

$$\underline{(arc\,sin\,y)' = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}}.$$

b) $f(y) = arccos\,y$, $\quad x = arccos\,y \Leftrightarrow y = cos\,x, \quad x \in (0, \pi)$,

$$\underline{(arccos\,y)' = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}}.$$

c) $f(y) = arc\,tg\,y$, $\qquad x = arc\,tg\,y \Leftrightarrow y = tgx, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$,

$$f'(y) = \frac{1}{(tgx)'} = \frac{1}{\frac{1}{cos^2 x}} = \frac{1}{\frac{sin^2 x + cos^2 x}{cos^2 x}} = \frac{1}{1 + tg^2 x} = \frac{1}{1 + y^2}$$, tj.

$$\underline{(arc\,tg\,y)' = \frac{1}{1 + y^2}}.$$

d) $f(y) = arc\,ctg\,y$, $\qquad x = arc\,ctg\,y \Leftrightarrow y = ctgx, \quad x \in (0, \pi)$,

$$\underline{(arc\,ctg\,y)' = -\frac{1}{1 + y^2}}.$$

Zadatak: Izvesti derivacije funkcija *arccos* i *arcctg*.

(8) Hiperbolne funkcije

a) $f(x) = shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = chx \quad \Rightarrow \quad \underline{(shx)' = chx}$.

b) $f(x) = chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = shx \quad \Rightarrow \quad \underline{(chx)' = shx}$.

c) $f(x) = thx = \frac{shx}{chx} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{ch^2 x - sh^2 x}{ch^2 x} = \frac{1}{ch^2 x} \quad \Rightarrow \quad \underline{(thx)' = \frac{1}{ch^2 x}}$.

d) $f(x) = cthx = \frac{chx}{shx} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{sh^2 x - ch^2 x}{sh^2 x} = -\frac{1}{sh^2 x} \quad \Rightarrow \quad \underline{(cthx)' = -\frac{1}{sh^2 x}}$.

(9) Area funkcije

Deriviraju se direktno ili prema pravilu za derivaciju inverznih funkcija.

a) $f(y) = Arshy = ln\left(y + \sqrt{y^2 + 1}\right)$, $\qquad x = Arshy \Leftrightarrow y = shx$,

$$f'(y) = \frac{1}{y + \sqrt{y^2 + 1}} \cdot \left(1 + \frac{2y}{2\sqrt{y^2 + 1}}\right) = \frac{1}{y + \sqrt{y^2 + 1}} \cdot \frac{y + \sqrt{y^2 + 1}}{\sqrt{y^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{y^2 + 1}}$$, ili

$$f'(y) = \frac{1}{(s\,hx)'} = \frac{1}{c\,hx} = \frac{1}{\sqrt{1 + sh^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}}.$$

$$\underline{(Arshy)' = \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}}}.$$

b) $f(y) = Archy = ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right)$,

$$\underline{(Archy)' = \frac{1}{\sqrt{y^2 - 1}}}.$$

c) $f(y) = Arthy = ln\sqrt{\dfrac{1+y}{1-y}}$,

$$\left(Arthy\right)' = \frac{1}{1-y^2}.$$

d) $f(y) = Arcthy = ln\sqrt{\dfrac{y+1}{y-1}}$,

$$\left(Arcthy\right)' = \frac{1}{y^2-1}.$$

Logaritamska derivacija

Neka je zadana je funkcija $f(x) = g(x)^{h(x)}$ i neka je $g(x) > 0$. Tražimo $f'(x)$.
Uz pretpostavku da je $g(x) > 0$ logaritmiramo zadanu funkciju:

$$f(x) = g(x)^{h(x)} \,/\, ln$$

$$ln\, f(x) = h(x) \cdot ln\, g(x) \;/'$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = h'(x) \cdot ln\, g(x) + h(x) \cdot \frac{g'(x)}{g(x)}$$

$$f'(x) = f(x)\left[h'(x) \cdot ln\, g(x) + h(x) \cdot \frac{g'(x)}{g(x)}\right]$$ - *logaritamska derivacija*

Primjer: Derivacija funkcije $f(x) = x^x$, $(x > 0)$.

$$f(x) = x^x \;/\; ln$$

$$ln\, f(x) = x \cdot ln\, x \;/'$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = ln\, x + x \cdot \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = x^x\left(ln\, x + 1\right).$$

Zadaci:

1. Derivirati funkciju $f(x) = x^{x^x}$.
2. Derivirati funkciju $f(x) = (sin\, x)^{cos\, x}$.

Derivacija implicitno zadane funkcije

Ponovimo:
Skup svih uređenih parova realnih brojeva koji zadovoljavaju jednadžbu oblika $F(x,y)=0$ određuje neki podskup od R^2 (npr. kružnica, elipsa,…), ali općenito *ne mora* biti graf neke funkcije.
Ako postoji funkcija $f(x)$ takva da je $F(x,f(x))=0$, kažemo da je funkcija *f zadana implicitno* sa $F(x,y)=0$.
Derivaciju takve funkcije možemo odrediti bez da eksplicitno određujemo funkciju, tj.

$$\left.\begin{array}{l} F(x,y)=0 \\ y=f(x) \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{f'(x)=-\frac{F_x}{F_y}},$$

F_x - F derivirano po x,
F_y - F derivirano po y.

Primjer:
1. $F(x,y)=0$

$$F(x,y)=x^2+y^2-1=0 \Rightarrow f'(x)=-\frac{2x}{2y}=-\frac{x}{y},$$

$$x^2+y^2-1=0 \Rightarrow \begin{cases} f_1(x)=\sqrt{1-x^2} \Rightarrow f_1'(x)=-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} \\ f_2(x)=-\sqrt{1-x^2} \Rightarrow f_2'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} \end{cases}.$$

Derivacija parametarski zadanih funkcija

Ponovimo:
Neka su zadane realne funkcije

.
Za svaku vrijednost varijable (parametra) $t\in I$ dobivamo uređen par brojeva $(\varphi(t),\psi(t))$ koji predstavlja točku u ravnini. Ako postoji φ^{-1}, onda je $t=\varphi^{-1}(x)$ i $y=\psi(t)=\psi(\varphi^{-1}(x))$.

Sada nije teško odrediti derivaciju:

$$y=y(x)=\psi(\varphi^{-1}(x)) \;/'$$

$$y'(x)=\frac{dy}{dx}=\psi'\underbrace{(\varphi^{-1}(x))}_{=t}\cdot\underbrace{(\varphi^{-1})'(x)}_{=\frac{1}{\varphi'(t)}}=\psi'(t)\cdot\frac{1}{\varphi'(t)}$$

Dakle, $$y'(x)=\frac{dy}{dx}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

Oznake: $$\varphi'(t)=\frac{dx}{dt}=\dot{x}(t),\quad \psi'(t)=\frac{dy}{dt}=\dot{y}(t)\quad\Rightarrow\quad y'(x)=\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}.$$

Teorem

Neka su $x=\varphi(t)$ i $y=\psi(t)$ derivabilne funkcije na intervalu $I\subseteq R$ i neka je $\frac{d\varphi}{dt}\neq 0$ na *I*. Tada vrijedi:

(1) funkcije $x=\varphi(t)$ i $y=\psi(t)$ za $t\in I$ definiraju funkciju $y(x)=\psi\left(\varphi^{-1}(x)\right)$, i

(2) funkcija $y(x)=\psi\left(\varphi^{-1}(x)\right)$ je derivabilna i vrijedi $y'(x)=\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)},\ \ t\in I$.

Primjeri:

1. Odrediti eksplicitni oblik funkcije koja je zadana parametarskim jednadžbama $x=1-5t$ i $y=-4+t$.

$$\begin{cases} x=1+5t & \Rightarrow t=\dfrac{x-1}{5} \\ y=-4+t \end{cases}\quad \Rightarrow\quad y=-4+\frac{x-1}{5}=\frac{x}{5}-\frac{21}{5}\quad\Rightarrow\quad y=f(x)=\frac{x}{5}-\frac{21}{5}.$$
$$t\in R$$

2. Odrediti derivaciju $y'(x)$ funkcije iz prethodnog primjera.

$$\begin{cases} x=1+5t \\ y=-4+t \end{cases}\quad\Rightarrow\quad y'(x)=\frac{1}{5}.$$

3. Odrediti derivaciju $y'(x)$ funkcije koja je zadana parametarski sa

$$\begin{cases} x=2\cos t \\ y=2\sin t \end{cases}\quad\Rightarrow\quad y'(x)=\frac{2\cos t}{-2\sin t}=-ctgt.$$

Druga derivacija parametarski zadane funkcije

$$y''(x)=(y')'(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)(t)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)\frac{dt}{dx}=\frac{\ddot{y}\dot{x}-\ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x})^2}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\ddot{y}\dot{x}-\ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x})^3},\ \text{tj.}$$

$$y''(x)=\frac{\ddot{y}\dot{x}-\ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x})^3}.$$

Primjeri:

1. Odrediti drugu derivaciju $y''(x)$ funkcije zadane parametarski sa $\begin{cases} x = 1+5t \\ y = -4+t \end{cases} \quad t \in R$.

$$\left.\begin{array}{l} x = 1+5t \;\Rightarrow\; \dot{x}(t) = 5 \;\Rightarrow\; \ddot{x}(t) = 0 \\ y = -4+t \;\Rightarrow\; \dot{y}(t) = 1 \;\Rightarrow\; \ddot{y}(t) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad y''(x) = \frac{0\cdot 5 - 0\cdot 1}{5^3} = 0$$

2. Odrediti drugu derivaciju $y''(x)$ funkcije zadane parametarski sa $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$.

$$\left.\begin{array}{l} x = a\cos t \;\Rightarrow\; \dot{x}(t) = -a\sin t \;\Rightarrow\; \ddot{x}(t) = -a\cos t \\ y = b\sin t \;\Rightarrow\; \dot{y}(t) = b\cos t \;\Rightarrow\; \ddot{y}(t) = -b\sin t \end{array}\right\} \Rightarrow$$

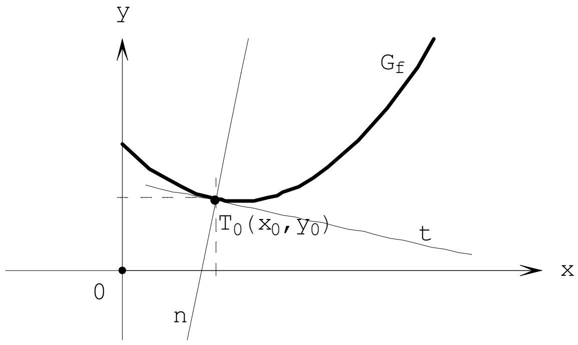
$$y''(x) = \frac{b\sin t\cdot a\sin t + a\cos t\cdot b\cos t}{(-a\sin t)^3} = \frac{ab}{-a^3\sin^3 t} = -\frac{b}{a^2\sin^3 t}.$$

Primjena prve derivacije

Od raznih primjena prve derivacije, na ovom ćemo mjestu navesti sljedeće:

a) Jednadžba tangente i normale u točki krivulje $y = y(x)$.

$T_0(x_0, y_0)$ - točka grafa funkcije $y = y(x)$



Tangenta u točki T_0: $\quad t\ldots\; y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$

Normala u točki T_0: $\quad n\ldots\; y - y_0 = -\dfrac{1}{y'(x_0)}(x - x_0)$

Primjer: Odrediti jednadžbu tangente i normale krivulje $y = x^2$ u točki $T_0(1,-)$.

Točka je na krivulji $\Rightarrow$ $T_0(1,1)$

$y = x^2 \;\Rightarrow\; y' = 2x \;\Rightarrow\; y'(x_0) = y'(1) = 2$

Tangenta u točki $T_0(1,1)$: $\quad y - 1 = 2(x-1)$,

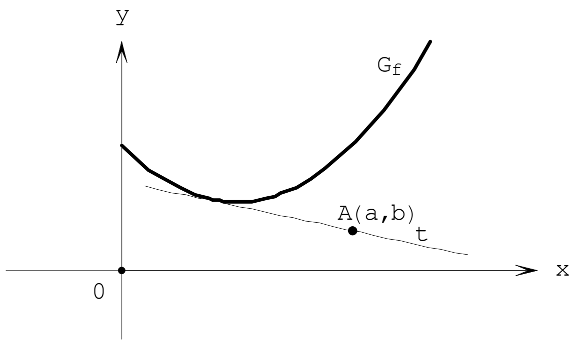
$t\ldots \quad \underline{y = 2x - 1}$.

Normala u točki $T_0(1,1)$: $y-1=-\frac{1}{2}(x-1)$,

$$n\ldots \quad \underline{y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}}.$$

b) Jednadžba tangente iz neke točke izvan krivulje.

$A(a,b)$ - točka izvan grafa krivulje $y=y(x)$



Odredimo jednadžbu tangente nekom nepoznatom točkom $T_0(x_0,y_0)$ krivulje, tako da sadrži točku A.

Jednadžba tangente: $t\ldots\ y-y_0=y'(x_0)(x-x_0)$

Tražimo dirałište tangente i krivulje:

$A(a,b)\in t \quad\Rightarrow\quad b-y(x_0)=y'(x_0)(a-x_0) \quad\Rightarrow\quad x_0$, tj. prva koordinata dirališta.

Primjer: Odrediti jednadžbu tangente iz točke $A(2,0)$ na krivulju $y=x^3$.

$y=x^3 \ \Rightarrow\ y'=3x^2 \ \Rightarrow\ y'(x_0)=3(x_0)^2$

Tangenta točkom $T_0(x_0,y(x_0))$: $y-y(x_0)=y'(x_0)(x-x_0)$

Točka $A(2,0)$ leži na tangenti $\Rightarrow$ $0-y(x_0)=y'(x_0)(2-x_0)$

$$0-{x_0}^3=3{x_0}^2(2-x_0)$$

$${x_0}^3-3{x_0}^2=0$$

$${x_0}^2(x_0-3)=0$$

Iz posljednje jednakosti odredimo dirališta tangente i krivulje:

$$(x_0)_1=0 \ \ \& \ \ (x_0)_2=3.$$

Tangenta točkom $T_0(0,0)$: $y-0=0(x-0) \quad\Rightarrow\quad y=0$,

Tangenta točkom $T_0(3,27)$: $y-27=27(x-3) \quad\Rightarrow\quad y=27x-54$.