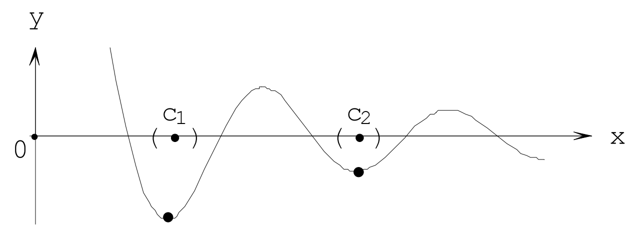
11. OSNOVNI TEOREMI DIFERENCIJALNOG RAČUNA

Teoremi koje ćemo navesti u ovom poglavlju su osnovni teoremi koji osiguravaju ispravnost primjena diferencijalnog računa.

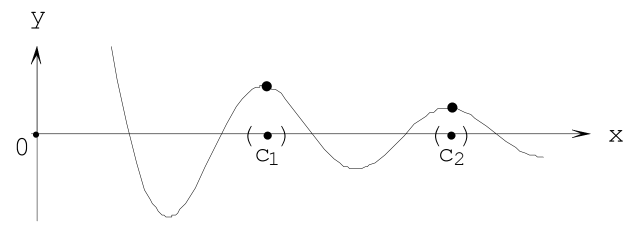
Potrebna je, kao prvo, sljedeća definicija:

Definicija
Funkcija $f:[a,b]\to R$ ima lokalni ekstrem (*minimum* ili *maksimum*) u točki $c\in(a,b)$ ako postoji neka okolina O_c točke c tako da vrijedi:

1) $\forall x\in O_c \quad \Rightarrow \quad f(x)\geq f(c)$ ....*lokalni minimum u c*,



2) $\forall x\in O_c \quad \Rightarrow \quad f(x)\leq f(c)$ ....*lokalni maksimum c*.



FERMATOV TEOREM

Pierre de Fermat (1601-1665), francuski matematičar

Neka funkcija $f:[a,b]\to R$ ima ekstrem u točki $c\in(a,b)$. Ako postoji $f'(c)$, onda je $f'(c)=0$.

Dokaz
Pretpostavimo da funkcija *f* ima maksimum u točki *c*, tj.

$$\forall x\in O_c,\quad f(x)\leq f(c) \quad \Rightarrow \quad f(x)-f(c)\leq 0.$$

Pretpostavili smo da u točki *c* postoji derivacija, tj. postoji $f'(c)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}$.

Neka je $\underline{c+\Delta x>c}$.
Slijedi:

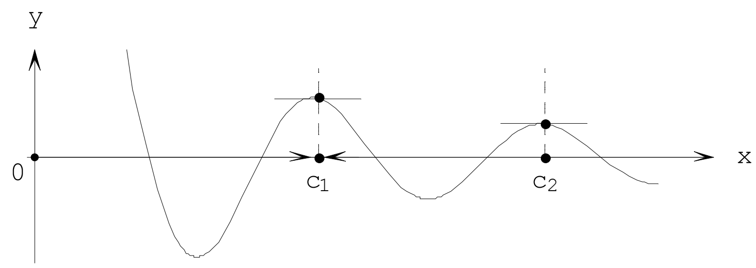
$$\Delta x>0 \text{ i } f(c+\Delta x)-f(c)\le 0, \text{ tj.}$$

$$\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}\le 0 \quad\Rightarrow\quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}\le 0.$$

Neka je $\underline{c+\Delta x<c}$.
Slijedi:

$$\Delta x<0 \text{ i } f(c+\Delta x)-f(c)\le 0, \text{ tj.}$$

$$\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}\ge 0 \quad\Rightarrow\quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}\ge 0.$$



Iz pretpostavke da je funkcija *f* derivabilna u točki *c* slijedi da su oba gornja limesa moraju biti jednaka a to je moguće samo ako su jednaka nuli, tj. ako je $f'(c)=0$.
Analogno za slučaj da *f* ima minimum u točki *c*. □

Napomena 1
Fermatov teorem nam kazuje da ćemo točke ekstrema funkcije nalaziti među rješenjima jednadžbe $f'(x)=0$, koja nazivamo *stacionarnim* ili *kritičnim* točkama.

Napomena 2
Pretpostavka ovog teorema jest da postoji derivacija u promatranoj točki. Naime, funkcija može imati ekstrem u nekoj točki a da u njoj nema derivaciju. Na primjer, funkcija $f(x)=|x|$, u točki $x=0$ ima minimum ali ne i derivaciju.

ROLLEOV TEOREM

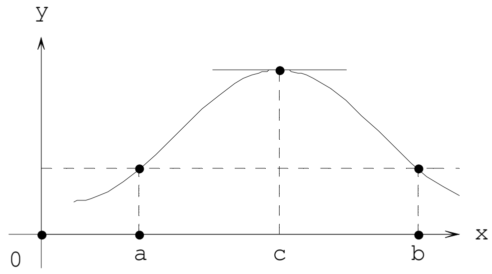
Michel Rolle (1652-1719), francuski matematičar

Neka je funkcija $f:[a,b]\to R$ neprekidna na $[a,b]$, neka ima derivaciju u svakoj točki $x\in(a,b)$ i neka je $f(a)=f(b)$. Tada postoji točka $c\in(a,b)$ u kojoj je $f'(c)=0$.

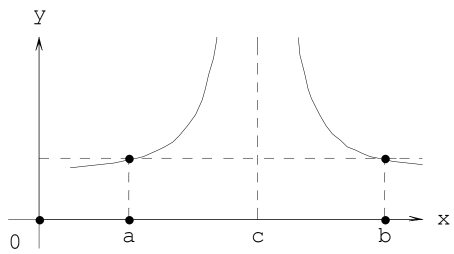
Dokaz
Po pretpostavci je funkcija *f* neprekidna na $[a,b]$. Prema Bolzano-Weierstrassov teoremu je funkcija *f* ograničena na $[a,b]$, tj. poprima najveću i najmanju vrijednost na $[a,b]$.

Kako je $f(a) = f(b)$, barem jedna od tih vrijednosti neće biti na kraju intervala, tj. jedan od tih ekstrema pada unutar intervala.
Fermatov teorem $\Rightarrow$ u točki ekstrema $c \in (a,b)$ jest $f'(c) = 0$.□

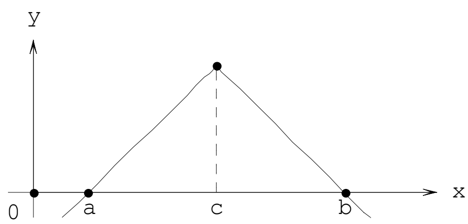
Ilustracije uz pretpostavke Rolleovog teorema:



- funkcija neprekidna na $[a,b]$



- prekidna funkcija na $[a,b]$



- neprekidna, ali ne i derivabilna funkcija na (a,b)

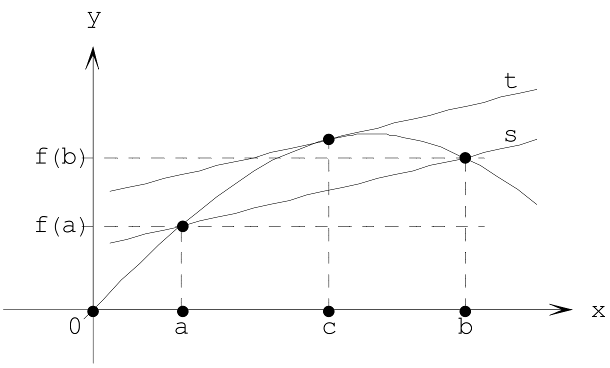
LAGRANGEOV TEOREM (Teorem srednje vrijednosti diferencijalnog računa)

Joseph Louis Lagrange (1736-1813), francuski matematičar

Neka je funkcija $f:[a,b] \to R$ neprekidna na $[a,b]$ i neka ima derivaciju u svakoj točki $x \in (a,b)$. Tada postoji točka $c \in (a,b)$ tako da vrijedi

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Geometrijski:



Dokaz
Jednadžba pravca (sekante *s*) točkama $(a, f(a))$, $(b, f(b))$:

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \quad \Rightarrow \quad y(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a).$$

Uvedimo funkciju $F(x) = f(x) - y(x)$. Vrijedi:

$$F(x) = f(x) - y(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - f(a), \qquad (*)$$

$$x = a \quad \Rightarrow \quad F(a) = f(a) - y(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) - f(a) = 0,$$

$$x = b \quad \Rightarrow \quad F(b) = f(b) - y(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) - f(a) = 0.$$

Funkcija *F* je neprekidna i derivabilna, kao razlika neprekidnih i derivabilnih funkcija i $F(a) = F(b) = 0$.
Rolleov teorem $\Rightarrow$ postoji točka $c \in (a,b)$ tako da je ispunjeno $F'(c) = 0$.
Izračunajmo derivaciju funkcije *F*:

$$(*)' \quad \Rightarrow \quad F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

$$x = c \quad \Rightarrow \quad F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \quad \Rightarrow \quad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \ \square$$

Lagrangeov teorem ćemo često zapisivati u sljedećem obliku:

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \Rightarrow \quad f'(c)(x - x_0) = f(x) - f(x_0), \text{ tj.}$$

$$\underline{f(x) = f(x_0) + f'(c)(x - x_0), \quad c \in (x_0, x).}$$

Neke posljedice Lagrangeovog teorema:

<u>Posljedica 1</u>
Pokazali smo da funkcija $f(x) = c,\ c \in R$ ima derivaciju nula. Dokažimo obrat, tj. ako funkcija ima derivaciju nula na otvorenom intervalu *I*, ona je konstantna funkcija na tom intervalu.

Dokaz: $$f'(c) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0, \quad \forall c \in I \quad \Rightarrow \quad f(x) = f(x_0), \quad \forall x \in I. \ \square$$

<u>Posljedica 2</u>
Ako dvije funkcije *f* i *g* imaju jednake derivacije na otvorenom intervalu *I*, onda se one razlikuju najviše za konstantu.

Dokaz.
Neka je ispunjeno: $f'(x) = g'(x), \quad \forall x \in I$.

Promotrimo funkciju $F(x) = f(x) - g(x)$
i njenu derivaciju $F'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$.
Posljedica 1 $\Rightarrow$ $F(x) = c$, tj.
$f(x) - g(x) = c \;\Rightarrow\; f(x) = g(x) + c, \quad \forall x \in I$ □

CAUCHYJEV TEOREM

Augustin Louis Cauchy (1789-1857), francuski matematičar

Ovaj teorem će nam poslužiti kod izračunavanja limesa zadane funkcije. Naime, neki limesi funkcija su povezani s limesima njihovih derivacija.

Neka su funkcije *f* i *g* neprekidne na $[a,b]$, neka postoje derivacije f' i g' na (a,b) i neka je $g'(x) \neq 0$ za svaki $x \in (a,b)$. Tada postoji točka $c \in (a,b)$ tako da vrijedi

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Dokaz

Kao prvo pokažimo da je $g(b) - g(a) \neq 0$.

Kad bi bilo $g(b) - g(a) = 0$, po Rolleovom teoremu bi slijedilo da postoji točka $x_0 \in (a,b)$ i $g'(x_0) = 0$, što je suprotno pretpostavci da je $g'(x) \neq 0$ za svaki $x \in (a,b)$.

Uvedimo funkciju $F(x)$ kao linearnu kombinaciju funkcija $f(x)$ i $g(x)$:

$$F(x) = \underbrace{\left[f(b) - f(a)\right]}_{\alpha} \cdot g(x) - \underbrace{\left[g(b) - g(a)\right]}_{\beta} \cdot f(x), \qquad (*)$$

$$x = a \Rightarrow F(a) = \left[f(b) - f(a)\right] \cdot g(a) - \left[g(b) - g(a)\right] \cdot f(a) = f(b)g(a) - g(b)f(a),$$

$$x = b \Rightarrow F(a) = \left[f(b) - f(a)\right] \cdot g(a) - \left[g(b) - g(a)\right] \cdot f(a) = f(b)g(a) - g(b)f(a).$$

Funkcija *F* je neprekidna i derivabilna, kao kombinacija neprekidnih i derivabilnih funkcija i $F(a) = F(b)$.

Rolleov teorem $\Rightarrow$ postoji točka $c \in (a,b)$ u kojoj je $F'(c) = 0$.

Izračunajmo derivaciju funkcije *F*:

$$(*)' \quad \Rightarrow \quad F'(x) = \left[f(b) - f(a)\right] \cdot g'(x) - \left[g(b) - g(a)\right] \cdot f'(x),$$

$$x = c \quad \Rightarrow \quad F'(c) = \left[f(b) - f(a)\right] \cdot g'(c) - \left[g(b) - g(a)\right] \cdot f'(c) = 0,$$

$$\Rightarrow \quad \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \; \square$$

Napomena
Lagrangeov teorem srednje vrijednosti je specijalni slučaj Cauchyjevog teorema koji se dobiva za $g(x)=x$.

TAYLOROV TEOREM (Taylorova formula)

Brook Taylor (1685-1731), engleski matematičar

Taylorov teorem (formula) se koristi kada se iz nekih razloga (najčešće radi pojednostavljenja daljnjeg računa) zadana funkcija želi aproksimirati polinomom.

Neka je zadana funkcija $f: I \to R$, gdje je I otvoren interval realnih brojeva, i neka f ima derivacije do uključivo reda n+1 u svakoj točki intervala I. Odaberemo li neku točku $x_0 \in I$, funkciju f možemo u okolini te točke prikazati u obliku

$$f(x)=f(x_0)+\frac{(x-x_0)}{1!}f'(x_0)+\frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0)+\cdots\cdots+\frac{(x-x_0)^n}{\mathrm{n}!}f^{(n)}(x_0)+R_n(x),$$

gdje je $R_n(x)=\dfrac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi),\quad \xi\in(x_0,x)$.

Dokaz vidi na prinjer u: Javor, Matematička analiza 1, str.151.□

Izraz

$$T_n(x)=f(x_0)+\frac{(x-x_0)}{1!}f'(x_0)+\frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0)+\cdots\cdots+\frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0)$$

nazivamo *Taylorov polinom n-tog stupnja* funkcije f u točki c.

Izraz

$$R_n(x)=\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi),\quad \xi\in(x_0,x),\quad \text{tj.}\quad \xi=x_0+\vartheta(x-x_0),\quad 0<\vartheta<1$$

nazivamo *ostatkom* pri aproksimaciji funkcije polinomom.

Taylorovu formulu možemo zapisati i u obliku:

$$f(x)=T_n(x)+R_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_n(x).$$

Napomena
Za $x_0=0$ radi se o prikazu funkcije polinomom u okolini ishodišta. Taylorova se formula tada naziva i *Maclaurinova formula* (Colin Maclaurin, 1698-1746, škotski matematičar), i glasi:

$$M_n(x)=f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\cdots\cdots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+R_n(x).$$

Napomena
Lagrangeov teorem srednje vrijednosti je specijalni slučaj Taylorovog teorema koji se dobiva za $n=0$:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{(x-x_0)}{1!}f'(\xi) \quad \Rightarrow \quad \underline{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(\xi), \quad \xi\in(x_0,x)}.$$

Primjer:

1. Razviti funkciju $f(x)=\sqrt{x}$ po Taylorovoj formuli u okolini točke $x_0=1$.

$$f(x)=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad f(x_0)=f(1)=1$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad f'(1)=\frac{1}{2}$$

$$f''(x)=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}} \quad \Rightarrow \quad f''(1)=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}$$

$$f'''(x)=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)x^{-\frac{5}{2}} \quad \Rightarrow \quad f'''(1)=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{8}$$

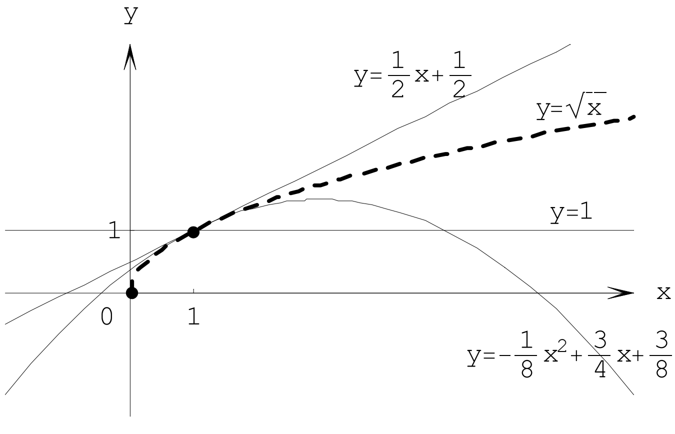
$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n-1}\,1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}{2^n}x^{-\left(\frac{2n-1}{2}\right)}$$

Slijedi:

$$\underline{\sqrt{x}=1+\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{8}(x-1)^2+\frac{3}{48}(x-1)^3-\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}{2^n}+R_n(x),}$$

$$R_n(x)=(-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}{2^n}\frac{(x-1)^{n+1}}{(n+1)!}\xi^{-\left(\frac{2n+1}{2}\right)}.$$



1. aproksimacija: $\sqrt{x}\cong 1$,

2. aproksimacija: $\sqrt{x}\cong 1+\frac{1}{2}(x-1)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$,

3. aproksimacija: $\sqrt{x}\cong 1+\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{8}(x-1)^2=-\frac{1}{8}x^2+\frac{3}{4}x+\frac{3}{8}$, itd.

Zadaci:

1. Napisati Maclaurinovu formulu sljedećih funkcija:
   a) $f(x) = e^x$;
   b) $f(x) = sin\, x$;
   c) $f(x) = cos\, x$.

2. Razviti funkciju $f(x) = ln\, x$ po potencijama od $(x-1)$.

3. Razviti funkciju $f(x) = ln(1+x)$ po potencijama od $(x-1)$.