12. PRIMJENE DERIVACIJA

INTERVALI MONOTONOSTI

Podsjetimo se što znači da je funkcija monotona na nekom intervalu $I = (a,b)$:
Neka je $f : I \to R$, $I = (a,b) \subseteq R$.
Ako vrijedi

$\forall x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, *f* je *strogo rastuća* funkcija;
$\forall x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$, *f* je *rastuća* funkcija;
$\forall x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$, *f* je *strogo padajuća* funkcija;
$\forall x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$, *f* je *padajuća* funkcija.

Za funkciju *f* kažemo da je *monotona* ako je rastuća ili padajuća, odnosno *strogo monotona* ako je strogo rastuća ili strogo padajuća funkcija.

Funkcija *f* je po dijelovima monotona ako se svaki konačni interval iz domene može rastaviti na konačno mnogo intervala na kojima je funkcija *f* monotona.

Teorem

> Neka je funkcija *f* derivabilna na intervalu $I = (a,b)$ i neka f' ima isti predznak za svaki $x \in I$. Tada je funkcija *f* monotona na intervalu *I*.

Dokaz
Neka su $x_1, x_2 \in I$. Lagrangeov teorem $\Rightarrow$ postoji točka $c \in (x_1, x_2)$ tako da vrijedi

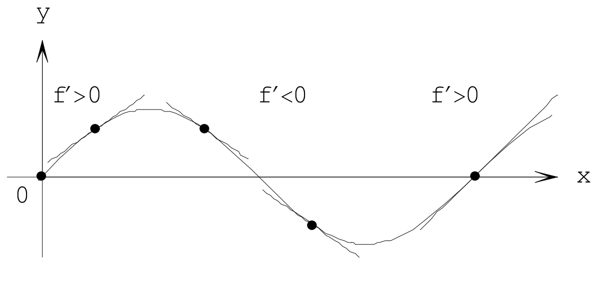
$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}, \text{ tj.} \qquad f(x_2) - f(x_1) = f'(c)\,(x_2 - x_1). \qquad (*)$$

Iz (*) slijedi:

$$\underline{f' \geq 0 \ \ \& \ \ x_1 < x_2}\,(x_2 - x_1 > 0) \ \Rightarrow \ f(x_2) - f(x_1) \geq 0 \ \Rightarrow \ \underline{f(x_1) \leq f(x_2)},$$
tj. funkcija je rastuća.

$$\underline{f' \leq 0 \ \ \& \ \ x_1 < x_2}\,(x_2 - x_1 > 0) \ \Rightarrow \ f(x_2) - f(x_1) \leq 0 \ \Rightarrow \ \underline{f(x_1) \geq f(x_2)},$$
tj. funkcija je padajuća. □

Dakle, na intervalima gdje je prva derivacija pozitivna (negativna) funkcija je rastuća (padajuća).



Primjer: Odrediti intervale monotonosti funkcije $f(x)=x^3-6x^2+11x-6$.

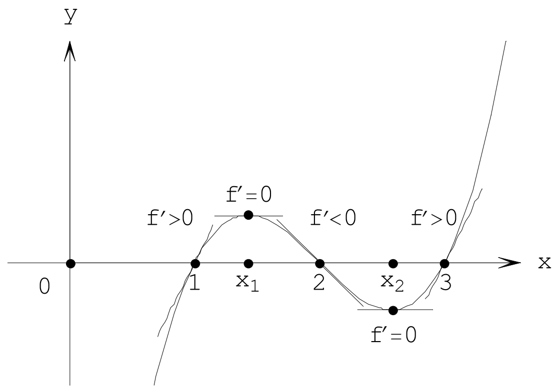
$$f(x)=x^3-6x^2+11x-6 \quad \Rightarrow \quad f'(x)=3x^2-12x+11$$

$$f'(x)=0 \quad \Rightarrow \quad 3x^2-12x+11=0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2}=2\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Slijede intervali monotonosti:

$f'(x)\geq 0$ na intervalima $\left\langle -\infty,\ 2-\sqrt{3}/3\right] \& \left[2+\sqrt{3}/3,\ +\infty\right\rangle$, što su intervali rasta, a

$f'(x)\leq 0$ na intervalu $\left[2-\sqrt{3}/3,\ 2+\sqrt{3}/3\right]$, što je interval pada funkcije.



EKSTREMNE VRIJEDNOSTI FUNKCIJE

U poglavlju 11 smo definirali pojam ekstrema (minimuma i maksimuma) funkcije. Sad ćemo se baviti njegovom egzistencijom.

Teorem (Nužan uvjet za ekstrem ≡ Fermatov teorem)

Neka funkcija $f:[a,b]\to R$ ima ekstrem u točki $c\in\langle a,b\rangle$. Ako postoji $f'(c)$, onda je $f'(c)=0$.

Podsjetimo se napomena iznesenih uz Fermatov teorem:

Napomena 1

Fermatov teorem nam kazuje da ćemo točke ekstrema funkcije nalaziti među rješenjima jednadžbe $f'(x)=0$, koja nazivamo *stacionarnim* ili *kritičnim* točkama.

Napomena 2

Pretpostavka ovog teorema jest da postoji derivacija u promatranoj točki. Naime, funkcija može imati ekstrem u nekoj točki a da u njoj nema derivaciju. Na primjer, funkcija $f(x)=|x|$, u točki $x=0$ ima minimum ali ne i derivaciju.

Osim toga, postoje slučajevi kad je derivacija jednaka nuli u nekoj točki, a da u njoj nije ekstrem funkcije. Na primjer, za funkciju $f(x)=x^3$ je $(0,0)$ stacionarna točka, ali ne i točka ekstrema. To znači da uvjet $f'(x)=0$ nije dovoljan za postojanje ekstrema.

Teorem (Dovoljan uvjet za ekstrem – pomoću prve derivacije)

Ako pri prijelazu kroz stacionarnu točku *c* derivacija neprekidne funkcije *f* mijenja predznak, onda je u točki *c* ekstrem funkcije, i to:
- u točki *c* je maksimum ako se predznak derivacije mijenja sa plus na minus;
- u točki *c* je minimum ako se predznak derivacije mijenja sa minus na plus.

Dokaz

Neka je $x \in O_c$, gdje je O_c okolina točke *c*.

Lagrangeov teorem $\Rightarrow$ postoji točka $x_0 \in O_c$ tako da vrijedi

$$f'(x_0) = \frac{f(x)-f(c)}{x-c}, \text{ tj. } \qquad f(x)-f(c) = f'(x_0)(x-c). \qquad (*)$$

Pretpostavimo da derivacija, prolazom kroz točku *c*, mijenja predznak s plusa na minus. Iz (*) slijedi:

$$\left.\begin{array}{l} \underline{x<c} \ \ (x-c<0) \ \ \& \ \ \underline{f'(x_0)>0} \\ \underline{x>c} \ \ (x-c>0) \ \ \& \ \ \underline{f'(x_0)<0} \end{array}\right\} \Rightarrow \ f(x)-f(c)<0 \ \Rightarrow \ \underline{f(x)<f(c)},$$

tj. u *c* je maksimum.

Pretpostavimo da derivacija, prolazom kroz točku *c*, mijenja predznak s minusa na plus. Iz (*) slijedi:

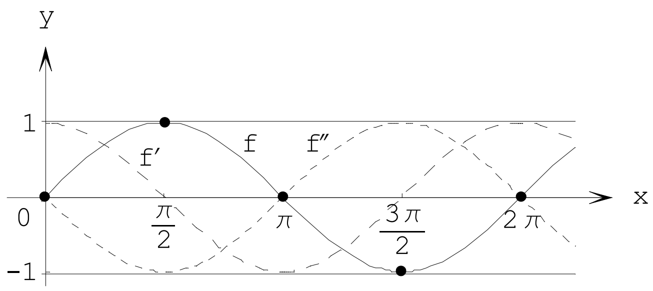
$$\left.\begin{array}{l} \underline{x<c} \ \ (x-c<0) \ \ \& \ \ \underline{f'(x_0)<0} \\ \underline{x>c} \ \ (x-c>0) \ \ \& \ \ \underline{f'(x_0)>0} \end{array}\right\} \Rightarrow \ f(x)-f(c)>0 \ \Rightarrow \ \underline{f(x)>f(c)},$$

tj. u *c* je minimum. □

Primjer:

Skica funkcije $y = \sin x$, njene prve i druge derivacije.

$$y = \sin x, \qquad y' = \cos x, \qquad y'' = -\sin x$$



Teorem (Dovoljan uvjet za ekstrem – pomoću druge derivacije)

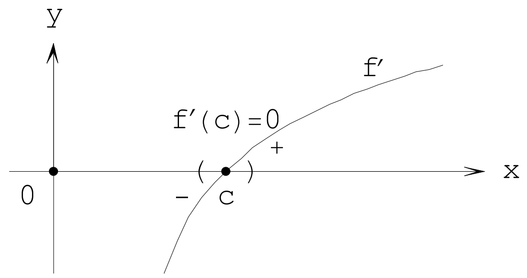
Ako u kritičnoj točki c funkcija f ima neprekidnu drugu derivaciju i vrijedi $f''(c) \neq 0$, onda funkcija ima ekstrem u toj točki, i to:
- u točki c je maksimum ako je $f''(c) < 0$;
- u točki c je minimum ako je $f''(c) > 0$.

Dokaz

Neka je $x \in O_c$, gdje je O_c okolina točke c, $f'(c) = 0$.
Lagrangeov teorem $\Rightarrow$ postoji točka $x_0 \in O_c$ tako da vrijedi

$$f'(x_0) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}, \text{ tj.} \qquad f(x) - f(c) = f'(x_0)\,(x - c). \qquad (*)$$

$f''(c) > 0 \Rightarrow$ prva derivacija prolazi kroz točku c rastući:



Iz (*) slijedi:

$$\left.\begin{array}{l} \underline{x < c}\ \ (x - c < 0)\ \ \&\ \ \underline{f'(x_0) < 0} \\ \underline{x > c}\ \ (x - c > 0)\ \ \&\ \ \underline{f'(x_0) > 0} \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) - f(c) > 0 \Rightarrow \underline{f(x) > f(c)},$$

tj. u c je minimum.

Analogno se dokazuje za maksimum. □

Teorem (Dovoljan uvjet za ekstrem – pomoću *n*-te derivacije)

Ako u kritičnoj točki c funkcija f ima neprekidnu derivaciju $2n$ – tog reda i vrijedi $f'(c) = f''(c) = \cdots = f^{(2n-1)}(c) = 0$ i $f^{(2n)}(c) \neq 0$, onda funkcija ima ekstrem u toj točki, i to:
- u točki c je maksimum ako je $f^{(2n)}(c) < 0$;
- u točki c je minimum ako je $f^{(2n)}(c) > 0$.

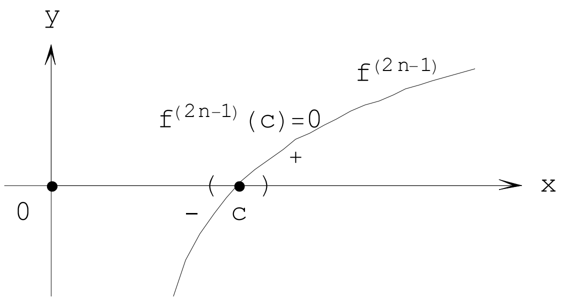
Dokaz

Neka je $x \in O_c$, gdje je O_c okolina točke c, $f'(c) = f''(c) = \cdots = f^{(2n-1)}(c) = 0$.
Taylorov teorem $\Rightarrow$

$$f(x)=f(c)+\frac{(x-c)}{1!}f'(c)+\frac{(x-c)^2}{2!}f''(c)+\cdots+\frac{(x-c)^{(2n-1)}}{(2n-1)!}f^{(2n-1)}(c+\theta(x-c)),\quad 0<\theta<1$$

$$f(x)-f(c)=\frac{(x-c)^{(2n-1)}}{(2n-1)!}f^{(2n-1)}(c+\theta(x-c))\qquad (**)$$

$f^{(2n)}(c)>0 \Rightarrow f^{(2n-1)}$ je rastuća funkcija, tj. $f^{(2n-1)}$ prolazi kroz točku c rastući:



Iz (**) slijedi:

$$\left.\begin{array}{l}\underline{x<c},\ (x-c)<0,\ (x-c)^{2n-1}<0\ \ \&\ \ \underline{f^{(2n-1)}(c+\theta(x-c))<0}\\ \underline{x>c},\ (x-c)>0,\ (x-c)^{2n-1}>0\ \ \&\ \ \underline{f^{(2n-1)}(c+\theta(x-c))>0}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ f(x)-f(c)>0\quad\Rightarrow\quad \underline{f(x)>f(c)},$$

tj. u c je minimum.

Analogno se dokazuje za maksimum. □

Primjeri:

1. Odrediti ekstreme funkcije $f(x)=x^3-6x^2+11x-6$ koristeći drugu derivaciju.

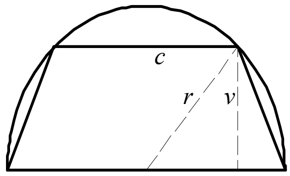
$$f(x)=x^3-6x^2+11x-6\quad\Rightarrow\quad f'(x)=3x^2-12x+11$$

$$f'(x)=0\quad\Rightarrow\quad 3x^2-12x+11=0\quad\Rightarrow\quad x_{1,2}=2\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\ \text{ su kritične točke za ekstrem}$$

$$f''(x)=6x-12$$

$$\Rightarrow\begin{cases} f''\left(2-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=-2\sqrt{3}<0 \ \Rightarrow \text{u } x=2-\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ je maksimum i to } f_M\left(2-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{2\sqrt{3}}{9},\\ f''\left(2+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=2\sqrt{3}>0 \ \Rightarrow \text{u } x=2+\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ je minimum i to } f_M\left(2+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=-\frac{2\sqrt{3}}{9}.\end{cases}$$

2. U polukrugu radijusa $r=2$ upisati jednakokračan trapez maksimalne površine tako da mu je osnovica jednaka promjeru polukruga.



$$P = \frac{(a+c)v}{2} = \left(\frac{a}{2} + \frac{c}{2}\right) \cdot v$$

$$\frac{a}{2} = r = 2$$

$$r^2 = v^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{c}{2} = \sqrt{4 - v^2}$$

$$P(v) = v\left(2 + \sqrt{4 - v^2}\right) = 2v + v\sqrt{4 - v^2}$$

$$P'(v) = 2 - \frac{v^2}{\sqrt{4 - v^2}} + \sqrt{4 - v^2} = 0$$

$P'(v) = 2 - \frac{v^2}{\sqrt{4 - v^2}} + \sqrt{4 - v^2} = 0 \quad \Rightarrow$ jedino pozitivno riješenje različito od nule… $v_{max} = \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad P_{max} = \sqrt{3}\,\frac{4 + 2\sqrt{4-3}}{2} = 3\sqrt{3}$.

L'HOSPITALOVA PRAVILA

Guillame François Antoine de l'Hospital (1661-1704), francuski matematičar

L'Hospitalova pravila se primjenjuju kod traženja granične vrijednosti (limesa) funkcije. Najjednostavnije izračunavanje limesa je izračunavanje limesa funkcije u točki u kojoj je ona neprekidna. Tada je

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \to x_0} x\right) = f(x_0).$$

Promatrat ćemo slučajeve kod kojih nije moguće direktno primijeniti teorem o limesu produkta, kvocijenta, itd. Radi se o takozvanim *neodređenim oblicima*, kad kojih ne možemo ocijeniti da li granična vrijednost postoji ili ne.
Naodređeni oblici su:

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0 \cdot \infty,\ \infty - \infty,\ 0^0,\ \infty^0,\ 1^\infty.$$

Metode rješavanja spomenutih oblika koje se temelje na derivacijama zovu su L'Hospitalova pravila.

Prvo pravilo ćemo formulirati za slučaj određivanja desnog limesa:

Teorem (oblik $\frac{0}{0}$)

Neka su funkcije *f* i *g* definirane na intervalu $(a,b]$. Neka je

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = 0,$$

i neka na intervalu $(a,b]$ postoje derivacije $f'(x)$ i $g'(x) \neq 0$. Ako postoji

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A,$$

onda postoji i limes kvocijenta $\frac{f(x)}{g(x)}$ i vrijedi

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A.$$

Dokaz

U svrhu dokaza teorema definirajmo: $f(a) = g(a) = 0$.

Sada prema pretpostavkama teorema i $x \to a^+$ zaključujemo:

- funkcije *f* i *g* su postale neprekidne u točki $x = a$,
- postoje derivacije f', g' u intervalu $(a,b]$, i vrijedi $g'(x) \neq 0$.

Time su ispunjene pretpostavke poopćenog teorema srednje vrijednosti za svaki interval $[a,x]$, $x \in (a,b]$. Dakle,

Cauchyjev teorem $\Rightarrow$ postoji točka $c \in (a,x)$ tako da vrijedi

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Zbog $a < c < x$, ako *x* teži prema *a*, mora i *c* težiti prema *a*. Kako po pretpostavci $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ teži prema *A*, tj. ima limes slijedi

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c\to a^+} \frac{f'(c)}{g'(c)} = A,$$ čime je teorem dokazan. □

Napomene uz teorem:

- dozvoljeno je da *A* bude nepravi limes, tj. da bude $A = \infty$ ili $A = -\infty$,
- analogni teorem vrijedi za slučaj određivanja lijevog limesa,
- analogni teorem vrijedi za neodređeni oblik $\frac{\infty}{\infty}$,
- l'Hospitalovo pravilo se ne primjenjuje na računanje limesa nizova,
- l'Hospitalovo pravilo se može primijeniti više puta uzastopce ako su ispunjeni uvjeti teorema.

Primjeri:

1. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \dfrac{2\sin^2 x+\sin x-1}{2\sin^2 x-3\sin x+1}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \dfrac{4\sin x\cos x+\cos x}{4\sin x\cos x-3\cos x}=-3$.

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-\sin x+x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-\cos x+1}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{6x}=\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x}{6}=\dfrac{1}{6}$.

Postupci koji se primjenjuju za ostale neodređene oblike

Oblik $\underline{0\cdot\infty}$

$$\lim_{x\to a} f(x)=0 \quad \& \quad \lim_{x\to a} g(x)=\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)]=0\cdot\infty .$$

Transformacijom $f(x)\cdot g(x)=\dfrac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}}=\dfrac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}$, se oblik $0\cdot\infty$ svodi na $\dfrac{0}{0}$ ili $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Oblik $\underline{\infty-\infty}$

$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty \quad \& \quad \lim_{x\to a} g(x)=\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to a}[f(x)-g(x)]=\infty-\infty .$$

Transformacijom $f(x)-g(x)=\dfrac{1}{\dfrac{1}{f(x)}}-\dfrac{1}{\dfrac{1}{g(x)}}=\dfrac{\dfrac{1}{g(x)}-\dfrac{1}{f(x)}}{\dfrac{1}{f(x)g(x)}}$,

se oblik $\infty-\infty$ svodi na $\dfrac{0}{0}$ ili $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Oblici $\underline{0^0,\ \infty^0,\ 1^\infty}$

Pojavljuju se prilikom računanja $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)}$.

Postupak je sljedeći:

$$y=f(x)^{g(x)} \,/ln$$

$$\ln y=g(x)\ln f(x) \quad \Rightarrow \quad y=e^{g(x)\ln f(x)} .$$

Prelaskom na limes slijedi

$$\lim_{x\to a} y=\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}=\lim_{x\to a} e^{g(x)\ln f(x)}=e^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\ln f(x)},$$

čime u eksponentu dobivamo neki od već razmatranih neodređenih oblika.

Primjeri:

1. $\lim\limits_{x\to 0} x^2\cdot\ln x=(0\cdot\infty)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{x^2}}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{2}{x^3}}=-\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0} x^2=0$.

2. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=(\infty-\infty)=\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}\right)=\left(\frac{0}{0}\right)=\cdots\cdots=\frac{1}{2}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=\left(1^{\infty}\right)$

$$y=\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}} \Big/ \ln \quad \Rightarrow \quad \ln y=\frac{1}{x}\ln\frac{\sin x}{x} \quad \Rightarrow \quad y=e^{\frac{1}{x}\ln\frac{\sin x}{x}}$$

$$\lim_{x\to 0^+} y=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}\ln\frac{\sin x}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\ln\frac{\sin x}{x}}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\cdot\ln\frac{\sin x}{x}=(\infty\cdot 0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\frac{\sin x}{x}}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\cdots\cdots=0$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to 0^+} y=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=e^{0}=1.$$

KONKAVNOST, KONVEKSNOST I TOČKE INFLEKSIJE

U ovom smo poglavlju već odgovorili na pitanje koje je značenje stalnosti predznaka prve derivacije funkcije na nekom intervalu. Sad ćemo se baviti značenjem predznaka druge derivacije. Za pretpostaviti je da će se pojaviti neke analogije.

Definicija (konkavnost, konveksnost)
Za graf derivablne funkcije $f(x)$ kažemo da je *konveksan* (*konkavan*) u intervalu $I=(a,b)$ ako se on nalazi iznad (ispod) tangente u bilo kojoj točki tog intervala.

<u>Uvjeti konkavnosti i konveksnosti dani analitički</u>
Jednadžba tangente krivulje s dijalištem u točki $T(c,f(c))$, $T\in I$:

$y(x)$ - ordinata do tangente, $f(x)$ - ordinata do krivulje,

$y(x)-f(c)=f'(c)(x-c)$,

$y(x)=f(c)+f'(c)(x-c)$.

Uvedimo funkciju *g* kao razliku ordinata do krivulje i do tangente:

$g(x)=f(x)-y(x)=f(x)-\left[f(c)+f'(c)(x-c)\right]$.

Graf Γ_f je konveksan (iznad tangente) ako je ispunjeno $\underline{g(x)=f(x)-y(x)\geq 0}$.

Graf Γ_f je konkavan (ispod tangente) ako je ispunjeno $\underline{g(x)=f(x)-y(x)\leq 0}$.

Teorem
Neka funkcija $f: I \to R,\ I=(a,b)$ ima drugu derivaciju u svakoj točki intervala *I.*
Graf funkcije *f* je *konveksan* u intervalu *I* ako je $f''(x)>0,\quad \forall x\in I$, odnosno
graf funkcije *f* je *konkavan* u intervalu *I* ako je $f''(x)<0,\quad \forall x\in I$.

Dokaz
Neka je $c\in I$.
Taylorova formula za funkciju *f* u točki $c \Rightarrow$

$$f(x)=f(c)+\frac{(x-c)}{1!}f'(c)+\frac{(x-c)^2}{2!}f''\big(c+\theta(x-c)\big),\ 0<\theta<1.$$

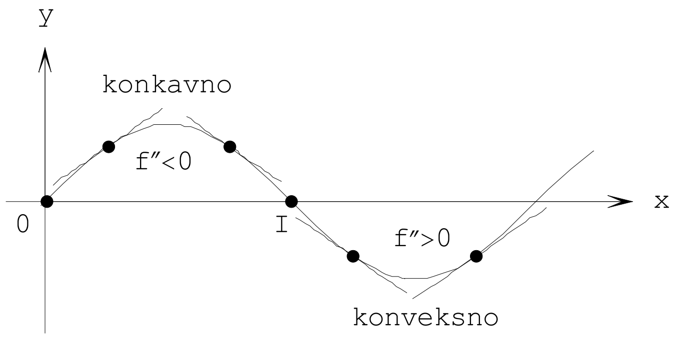
Uz ranije definirane funkcije $y(x)$ i $g(x)$, zapisujemo u obliku

$$f(x)-\underbrace{\left[f(c)+(x-c)f'(c)\right]}_{y(x)}=\frac{1}{2}(x-c)^2 f''\big(c+\theta(x-c)\big), \text{ tj.}$$

$$g(x)=f(x)-y(x)=\frac{1}{2}\underbrace{(x-c)^2}_{\geq 0} f''\big(c+\theta(x-c)\big). \qquad (*)$$

Iz (*) slijedi:
- $f''(x)>0 \ \Rightarrow\ g(x)=f(x)-y(x)\geq 0 \ \Rightarrow$ graf je konveksan u *I*,
- $f''(x)<0 \ \Rightarrow\ g(x)=f(x)-y(x)\leq 0 \ \Rightarrow$ graf je konkavan u *I*. □

Definicija (infleksija)
Točka infleksije ili *pregiba* grafa funkcije *f* je točka u kojoj graf mijenja konkavnost u konveksnost (ili obratno).



Nakon definicije infleksije bavit ćemo se njenom egzistencijom, kako smo to radili kod ekstrema.

Teorem (Nužan uvjet za infleksiju)

Ako funkcija $f: I\to R$ ima neprekidnu drugu derivaciju u točki $c\in I$ i ako ima infleksiju u toj točki, onda je $f''(c)=0$.

Dokaz
Pretpostavimo suprotno tvrdnji teorema, tj. neka je u točki $c \in I$ ispunjeno $f''(c) \neq 0$.
Pretpostavimo kao prvo da je $f''(c) > 0 \;\Rightarrow\; f''(x) > 0, \quad x \in O_c$.
Iz (*) slijedi:

$$\left.\begin{array}{l} x < c,\ (x-c) < 0,\ \underline{(x-c)^2 > 0}\ \&\ \underline{f''(x) > 0} \\ x > c,\ (x-c) > 0,\ \underline{(x-c)^2 > 0}\ \&\ \underline{f''(x) > 0} \end{array}\right\} \Rightarrow g(x) > 0$$

$\Rightarrow$ funkcija je konveksna u okolini točke c.

Dakle, prolazom kroz točku c funkcija ne mijenja konkavnost-konveksnost, tj. $x = c$ nije točka infleksije, što je suprotno pretpostavci teorema. Analogno bi se dokazalo sa $f''(c) < 0$.□

Napomena 1
Ovaj nam teorem kazuje da ćemo točke infleksije funkcije nalaziti među rješenjima jednadžbe $f''(x) = 0$, koja nazivamo *stacionarnim* ili *kritičnim* točkama za infleksiju.

Napomena 2
Pretpostavka ovog teorema jest da postoji infleksija u promatranoj točki. Naime, postoje slučajevi kad je druga derivacija jednaka nuli u nekoj točki, a da to nije točka infleksije. Na primjer, za funkciju $f(x) = x^4$ je $x = 0$ stacionarna točka, ali ne i točka infleksije. To znači da uvjet $f''(x) = 0$ nije dovoljan za postojanje točaka infleksije.

Teorem (Dovoljan uvjet za infleksiju – pomoću druge derivacije)

Ako pri prijelazu kroz kritičnu točku c druga derivacija funkcije f mijenja predznak, onda je točka c točka infleksije.

Dokaz
Neka je $x \in O_c$, gdje je O_c okolina točke c i $f''(c) = 0$.

Taylorova formula u točki $x = c$:

$$f(x) = f(c) + (x-c) f'(c) + \frac{1}{2}(x-c)^2 f''(c + \theta(x-c)),\ 0 < \theta < 1.$$

Pretpostavimo da f'' mijenja predznak sa minus na plus prolazom kroz točku c.
Od ranije imamo definiranu funkciju

$$g(x) = f(x) - \left[f(c) + (x-c) f'(c)\right] = \frac{1}{2}(x-c)^2 f''(c + \theta(x-c)). \qquad (*)$$

Iz (*) slijedi:

$\underline{x < c}$, $(x-c) < 0$, $(x-c)^2 > 0$ & $f''(c+\theta(x-c)) < 0 \;\Rightarrow\; g(x) < 0$,

tj. funkcija je konkavna.

$\underline{x > c}$, $(x-c) > 0,\ (x-c)^2 > 0\ \&\ f''(c+\theta(x-c)) > 0 \ \Rightarrow\ g(x) > 0$,

tj. funkcija je konveksna.

Dakle, prolazom kroz točku c funkcija mijenja konkavnost-konveksnost, tj. ima infleksiju u točki c.

Analogno za slučaj da f'' mijenja predznak sa plus na minus. □

Teorem (Dovoljan uvjet za infleksiju – pomoću *n*-te derivacije)

Ako u kritičnoj točki c funkcija f ima neprekidnu derivaciju $2(n+1)$ – og reda i vrijedi $f''(c) = f'''(c) = \cdots = f^{(2n)}(c) = 0$ i $f^{(2n+1)}(c) \neq 0$, onda graf funkcije f ima infleksiju u c.

Dokaz

Neka je $x \in O_c$, gdje je O_c okolina točke c, $f''(c) = \cdots = f^{(2n)}(c) = 0$.

Taylorov teorem $\Rightarrow$

$$f(x) = f(c) + (x-c)f'(c) + \frac{(x-c)^2}{2}f''(c) + \cdots + \frac{(x-c)^{(2n)}}{(2n)!}f^{(2n)}(c+\theta(x-c)),\ 0<\theta<1,$$

$$f(x) = f(c) + (x-c)f'(c) + \frac{(x-c)^{(2n)}}{(2n)!}f^{(2n)}(c+\theta(x-c)).$$

Za funkciju g sada imamo

$$g(x) = f(x) - \left[f(c) + (x-c)f'(c)\right] = \frac{(x-c)^{(2n)}}{(2n)!}f^{(2n)}(c+\theta(x-c)). \qquad (**)$$

Postoje dvije mogućnosti:

$\underline{f^{(2n+1)}(c) > 0} \Rightarrow f^{(2n)}$ je rastuća funkcija, tj. $f^{(2n)}$ prolazi kroz točku c rastući. *Slika!*

Iz (**) slijedi:

$\underline{x < c}$, $(x-c) < 0,\ (x-c)^{2n} > 0\ \&\ f^{(2n)}(c+\theta(x-c)) < 0 \ \Rightarrow\ \underline{g(x) < 0}$,

tj. funkcija je konkavna.

$\underline{x > c}$, $(x-c) > 0,\ (x-c)^{2n} > 0\ \&\ f^{(2n)}(c+\theta(x-c)) > 0 \ \Rightarrow\ \underline{g(x) > 0}$,

tj. funkcija je konveksna.

Dakle, prolazom kroz točku c graf funkcije prelazi s jedne na drugu stranu tangente, tj. ima infleksiju u točki c.

Za $\underline{f^{(2n+1)}(c) < 0}$ se dokazuje analogno prethodnom slučaju. □

Primjeri:

1. Odrediti točke infleksije funkcije $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ i intervale na kojima je ona konkavna odnosno konveksna.

   $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \ \Rightarrow\ f'(x) = 3x^2 - 12x + 11 \ \Rightarrow\ f''(x) = 6x - 12$

   $f''(x) = 0 \Rightarrow 6x - 12 = 0 \Rightarrow x = 2$ je kritična točka za infleksiju

$f'''(x)=6 \quad \Rightarrow \quad f'''(2)=6\neq 0 \quad \Rightarrow$ u točki $(2,f(2))$ funkcija ima infleksiju.

Intervali konkavnosti i konveksnosti:

$f''(x)<0$ na intervalu $(-\infty,2)$ $\Rightarrow$ funkcija je konkavna, a

$f''(x)>0$ na intervalu $(2,\infty)$, $\Rightarrow$ funkcija je konveksna.

2. Odrediti točke infleksije funkcije $f(x)=x^5$.

$f(x)=x^5 \;\Rightarrow\; f'(x)=5x^4 \Rightarrow f''(x)=20x^3$

$f''(x)=0 \;\Rightarrow\; x=0$ je kritična točka za infleksiju

$f'''(x)=60x^2 \quad \Rightarrow \quad f'''(0)=0$

$f^{iv}(x)=120x \quad \Rightarrow \quad f^{iv}(0)=0$

$f^{v}(x)=120 \quad \Rightarrow \quad f^{v}(0)=120\neq 0 \quad \Rightarrow$ u točki $(0,f(0))$ funkcija ima infleksiju.

ASIMPTOTE

Definicija

Pravac $y=ax+b$ zovemo *asimptotom* funkcije $f(x)$ ako udaljenost točke krivulje (grafa Γ_f) od pravca teži k nuli kad *x* teži u beskonačnost.

Slika!

Razlikujemo:

- horizontalne asimptote,
- vertikalne asimptote i
- kose asimptote.

Horizontalne asimptote

Pravac $y=b$ zovemo *horizontalnom asimptotom* ako mu se graf funkcije približava kad $x\to\infty$ $(x\to-\infty)$, tj. ako je

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=b \quad \text{ili} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=b\ .$$

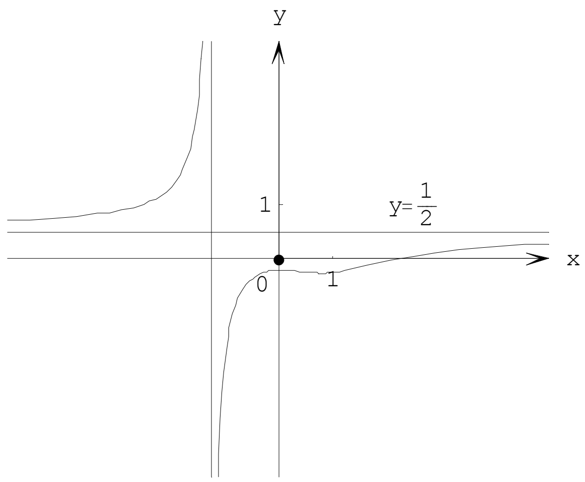
<u>Napomena</u>

Racionalna funkcija ima horizontalnu asimptotu ako je stupanj polinoma u brojniku jednak ili manji od stupnja polinoma u nazivniku.

Primjer:

1. $y=\dfrac{x^3-2x^2-1}{2x^3+x+5}$,

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3 - 2x^2 - 1}{2x^3 + x + 5} = \dfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad y = \dfrac{1}{2}$ je horizontalna asimptota.



Vertikalne asimptote

Pravac $x = c$ je *vertikalna asimptota* funkcije $y = f(x)$ ako je limes te funkcije nepravi kad $x \to c$, bilo slijeva ili sdesna, tj. ako je

$$\lim_{x\to c^+} f(x) = \pm\infty \quad \text{ili} \quad \lim_{x\to c^-} f(x) = \pm\infty .$$

<u>Napomena</u>
Racionalna funkcija ima vertikalne asimptote u nultočkama nazivnika, uz uvjet da to nisu ujedno i nultočke brojnika.

Primjeri:

1. $y = \dfrac{1}{x}, \qquad D(f) = R \setminus \{0\}$

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0 \qquad \Rightarrow \quad y = 0$ je horizontalna asimptota,

$x = 0$ je nultočka polinoma u nazivniku i to neparnog reda,

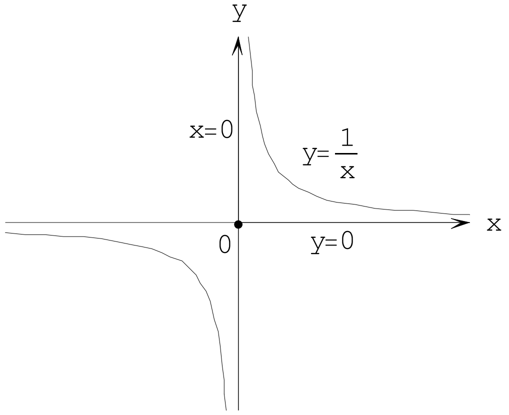
$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} &= +\infty \\ \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} &= -\infty \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad x = 0 \quad \text{je vertikalna asimptota.}$$

2. $y = \dfrac{1}{x^2}, \qquad D(f) = R \setminus \{0\}$

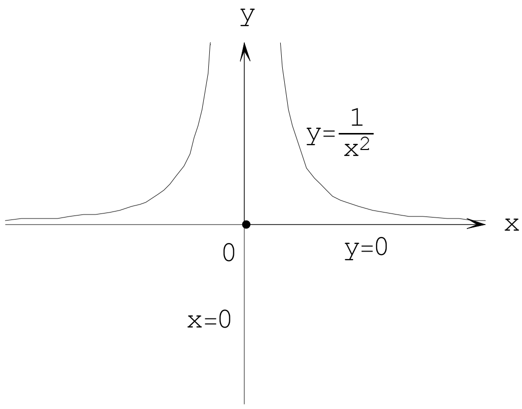
$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0$ je horizontalna asimptota,

$x = 0$ je nultočka polinoma u nazivniku i to parnog reda,

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x^2}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x^2}=+\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \quad x=0 \quad \text{je vertikalna asimptota.}$$



Slika uz primjer 1



Slika uz primjer 2

Kose asimptote

Kose asimptote su oblika $y = ax + b$, pa je za njihovo određivanje potrebno znati vrijednosti *a* i *b*. U tu svrhu označimo:

$f(x)$ - ordinata po krivulji,

$y(x)$ - ordinata po asimptoti.

Prema definiciji asimptote razlika $f(x)$ - $y(x)$ teži prema nuli kad *x* teži u beskonačnost, tj.

$$\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-ax-b\right]=0.$$

Funkciju $f(x)$ možemo tada prikazati u obliku

$$f(x)=ax+b+\alpha(x) \quad \& \quad \lim_{x\to\infty}\alpha(x)=0, \text{ tj.}$$

$$f(x)-ax-b=\alpha(x) \quad \& \quad \lim_{x\to\infty}\alpha(x)=0. \qquad (*)$$

<u>Odredimo *a*:</u>

Podijelimo li (*) s *x*, dobivamo

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{f(x)}{x}-a-\frac{b}{x}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot\alpha(x)=0 \quad\Rightarrow\quad \underline{a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}}.$$

<u>Odredimo *b*:</u>

$$\lim_{x\to\infty}\alpha(x)=0 \quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to\infty}\left[f(x)-ax-b\right]=0 \quad\Rightarrow\quad \underline{b=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-ax\right]}.$$

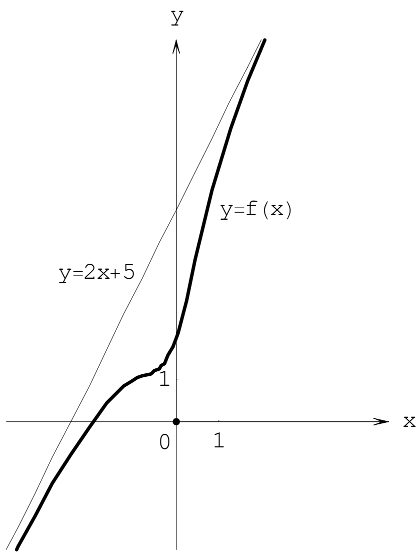
Zaključimo:

Ako funkcija ima kosu asimptotu $y = ax + b$, onda je $a=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ i $b=\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-ax\right]$.

Primjer:

3. Naći asimptote funkcije $y = \dfrac{2x^3 + 5x^2 + 3x + 2}{x^2 + 1}$, $\qquad D(f) = R$

Horizontalnu asimptotu nema jer je stupanj polinoma u brojniku veći od stupnja polinoma u nazivniku.
Vertikalne asimptote nema jer polinom u nazivniku nema realnih nultočaka.
Kosa asimptota:
$a = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \cdots = 2 \quad \& \quad b = \lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - 2x] = \cdots = 5 \quad \Rightarrow \quad y = 2x + 5$.



CRTANJE GRAFA FUNKCIJE

1. Ispitati funkciju $f(x) = \dfrac{x^3 - 4}{x^2}$ i nacrtati njen graf.

a) Domena: $D = R \setminus \{0\}$

b) Parnost, neparnost: $f(x) \neq f(-x) \;\Rightarrow$ funkcija nije parna,
$f(-x) \neq -f(x) \;\Rightarrow$ funkcija nije neparna.

c) Nul točke: $y = 0 \;\Rightarrow\; x^3 - 4 = 0, \quad x^3 = 4, \quad x = \sqrt[3]{4}$
Presjeci s osi y: $x = 0, \quad 0 \notin D$

d) Ekstremi:

$$y' = \frac{3x^2 \cdot x^2 - 2x\left(x^3 - 4\right)}{x^4} = \frac{x^3 + 8x}{x^3}$$

$$\frac{x^3 + 8}{x^3} = 0 \Rightarrow x^3 = -8 \Rightarrow x = \sqrt[3]{-2} \Rightarrow x = -2, \qquad f(-2) = -3$$

x	$-\infty$		-2		0		$-\infty$
y		↗	M	↘	P	↗	
y'		+		-		+	

P - prekid funkcije
m - minimum finkcije
M - maksimum funkcije $\quad \Rightarrow \; M(-2, -3)$

e) Infleksija:

$$y'' = \left(1 + 8x^{-3}\right)' = -24x^{-4} = -\frac{24}{x^4} = 0 \Rightarrow \text{ nema točaka infleksije}$$

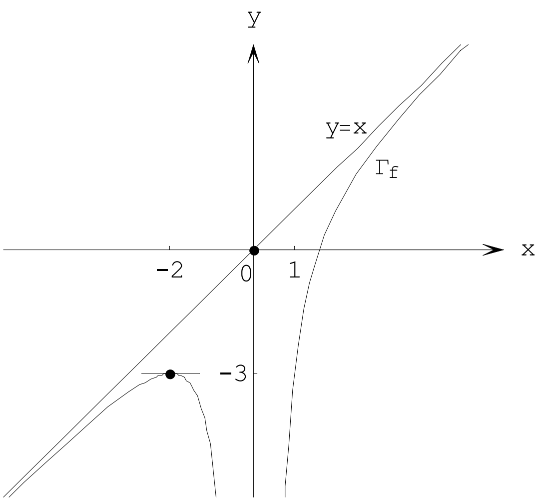
f) Asimptote:

$$\lim_{x\to 0^\pm} \frac{x^3 - 4 \quad / : x^2}{x^2 \quad / : x^2} = \lim_{x\to 0^\pm} \frac{x - \frac{4}{x^2}}{1} = -\infty \quad \Rightarrow \quad \text{Vertikalna asimptota: } x = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - 4}{x^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - \frac{4}{x^3}}{1} = 1 = k\,,$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[\left(f(x) - kx\right)\right] = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3 - 4}{x^2} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{-4}{x^2} = 0 = l \quad \Rightarrow \quad \text{Kosa asimptota: } y = x$$

g) Graf:



2. Ispitati funkciju $f(x)=x-6ln\left(1-\frac{1}{x}\right)$ i nacrtati njen graf.

a) Domena: $\left(1-\frac{1}{x}\right)>0,\ \ x\neq 0$

$$\frac{x-1}{x}>0 \ \Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x-1>0 & & x-1<0 \\ \underline{x>0} & & \underline{x<0} \\ x>1 & \text{ili} & x<1 \\ \underline{x>0} & & \underline{x<0} \\ x>1 & & x<0 \end{array}\right\} \Rightarrow \ D=(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$$

b) Parnost i neparnost:
Funkcija nije ni parna ni neparna (domena nije simetrična s obzirom na ishodište).

c) Nul točke: $y=0 \Rightarrow \frac{x}{6}=ln\left(1-\frac{1}{x}\right) \Rightarrow$ jednadžba nema realnih rješenja, tj. nema točaka presjeka s x osi

Presjeci s osi y: $x=0,\ \ 0\notin D \ \Rightarrow$ nema točaka presjeka s y osi

d) Ekstremi:

$$f'(x)=1-\frac{6}{1-\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2}=1-\frac{6}{(x-1)x}$$

$$f'(x)=\frac{x(x-1)-6}{x(x-1)}=\frac{x^2-x-6}{x(x-1)}=0 \ \Rightarrow \ x^2-x-6=0 \ \Rightarrow \ x_1=-2, \quad x_2=3$$

x	$-\infty$	-2		0 1		3	$-\infty$
y	↗	M	↘	P	↘	m	↗
y'	+		-		-		+

$$f(x_1)=f(-2)=-2-6\,ln\left(\frac{3}{2}\right)=-4.43279 \quad \Rightarrow \quad M(-2,-4.43279)$$

$$f(x_2)=f(3)=3-6\,ln\left(\frac{2}{3}\right)=5.43279 \quad \Rightarrow \quad m(3,5.43279)$$

e) Infleksija:

$$f''(x)=\frac{(2x-1)x(x-1)-(2x-1)(x^2-x-6)}{x^2(x-1)^2}=\frac{(2x-1)(x^2-x)-(2x-1)(x^2-x-6)}{x^2(x-1)^2}$$

$$f''(x)=\frac{(2x-1)(x^2-x-x^2+x+6)}{x^2(x-1)^2}=\frac{6(2x-1)}{x^2(x-1)^2}=0$$

$$2x-1=0 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{1}{2},\ \ \frac{1}{2}\notin D \ \Rightarrow \ \text{nema točaka infleksije}$$

f) Asimptote:

$$\lim_{x\to 0^-}\left(x-6\,ln\left(1-\frac{1}{x}\right)\right)=0-\infty=-\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+}\left(x-6\,ln\left(1-\frac{1}{x}\right)\right)=\left(1-6\,ln\frac{0}{1}\right)=1-(-\infty)=+\infty$$

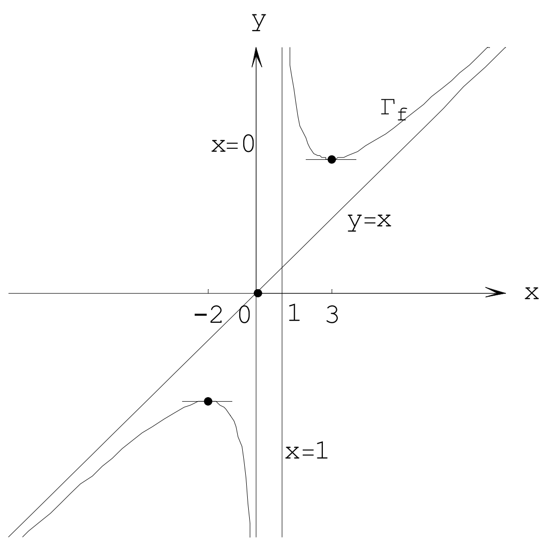
Vertikalne asimptote: $x=0,\quad x=1$

$$k=\lim_{x\to\infty}=\left(\frac{f(x)}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{6\,ln\left(\frac{x-1}{x}\right)}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\cdot 6\,ln\left(1-\frac{1}{x}\right)\right)=1=k$$

$$l=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(x-6\,ln\left(1-\frac{1}{x}\right)-x\right)=0=l$$

Kosa asimptota: $y=x$

g) Graf:



□

3. Analizirati funkciju $f(x)=\sqrt[3]{x^3-x^2-x+1}$ i skicirati njen graf.

a) Domena: $D=R$

b) Nul točke: $y=0 \Rightarrow x^3-x^2-x+1=(x-1)(x^2-1)=0 \Rightarrow x=\pm1$

Presjeci s osi y: $x=0 \Rightarrow y=1$

c) Parnost, neparnost: Funkcija nije parna ni neparna.

d) Ekstremi:

$$f'(x)=\frac{1}{3}(x^3-x^2-x+1)^{-\frac{2}{3}}\cdot(3x^2-2x-1)=\frac{3x^2-2x-1}{3\sqrt[3]{(x^3-x^2-x+1)^2}}=0$$

$3x^2-2x-1=0 \Rightarrow x_1=-\frac{1}{3}$ & $x_2=1$

$x^3-x^2-x+1=0 \Rightarrow x=\pm1 \Rightarrow$ tangenta paralelna s osi y

x	$-\infty$	-1	$-1/3$	1	$-\infty$
y	↗	↗	M ↘	m ↗	
y'	+	+	-	+	

$x_1=-\frac{1}{3} \Rightarrow f(x_1)=\frac{2\sqrt[3]{4}}{3} \Rightarrow M\left(-\frac{1}{3},\frac{2\sqrt[3]{4}}{3}\right)$

$x_2=1 \Rightarrow f(x_2)=0 \Rightarrow m(1,0)$

e) Asimptote:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt[3]{\frac{x^3-x^2-x+1}{x^3}}=\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}=1=k$$

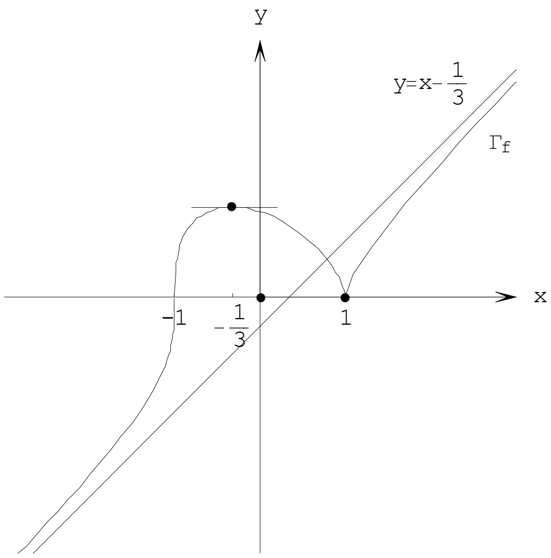
$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-k\cdot x)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt[3]{x^3-x^2-x+1}-x\right)=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt[3]{x^3-x^2-x+1}-x\right)\frac{\left(\left(\sqrt[3]{x^3-x^2-x+1}\right)^2+x\sqrt[3]{x^3-x^2-x+1}+x^2\right)}{\left(\left(\sqrt[3]{x^3-x^2-x+1}\right)^2+x\sqrt[3]{x^3-x^2-x+1}+x^2\right)}=\cdots=-\frac{1}{3}=l$$

Kosa asimptota: $y=x-\frac{1}{3}$

Nema horizontalne asimptote: $\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\pm\infty$

f) Graf:



□

4. Naći domenu, presjeke s koordinatnim osima, ekstreme, asimptote i skicirati graf funkcije $y = e^{\frac{1}{x^2+4x+3}}$.

a) Domena: $x^2 + 4x + 3 \neq 0$

$x^2 + 4x + 3 = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = -1,\, x_2 = -3 \;\Rightarrow\; D = R\backslash\{-1, -3\}$

b) Parnost, neparnost:
Funkcija nije parna ni neparna (domena nije simetrična prema ishodištu).

c) Nul točke: $e^x \neq 0, \forall x \;\Rightarrow$ nema nul točaka

Presjeci s osi y: $x = 0 \Rightarrow y = e^{\frac{1}{3}} \Rightarrow \left(0, e^{\frac{1}{3}}\right)$

d) Ekstremi:

$$f'(x) = -e^{\frac{1}{x^2+4x+3}} \frac{2x+4}{\left(x^2+4x+3\right)^2} = 0 \;\Rightarrow\; -2x = 4 \;\Rightarrow\; x = -2$$

x	-∞	-3		-2		-1		+∞
y	↗	P	↗	M	↘	P	↘	
y'	+		+		-		-	

$x = -2,\; f(-2) = \dfrac{1}{e} \;\Rightarrow\; M_{max}\left(-2, \dfrac{1}{e}\right)$

e) Asimptote:

$$\lim_{x\to(-1)^+} e^{\frac{1}{x^2+4x+3}} = e^{\lim_{x\to(-1)^+}\frac{1}{x^2+4x+3}} = e^{\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{(-x)^2-4x+3}} = e^{+\infty} = +\infty$$

$$\lim_{x\to(-1)^-} e^{\frac{1}{x^2+4x+3}} = 0 = e^{\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{(-x)^2-4x+3}} = e^{\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{x^2-4x+3}} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = 0$$

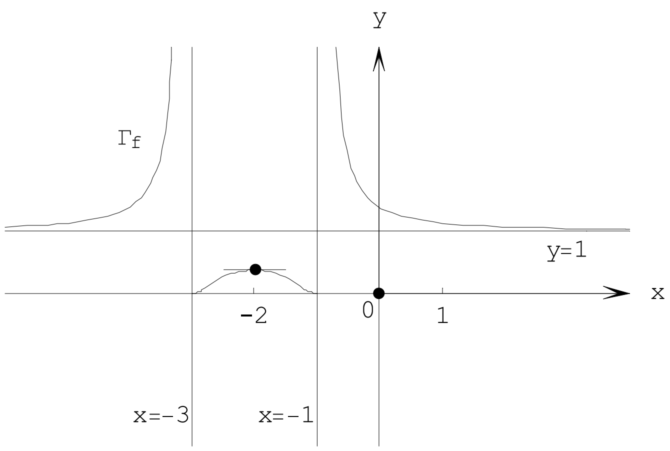
$$\lim_{x\to(-3)^+} e^{\frac{1}{x^2+4x+3}} = e^{\lim_{x\to(3)^-}\frac{1}{(x)^2-4x+3}} = e^{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x\to(-3)^-} e^{\frac{1}{x^2+4x+3}} = e^{\lim_{x\to(3)^+}\frac{1}{(x)^2-4x+3}} = e^{+\infty} = +\infty$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} e^{\frac{1}{x^2+4x+3}} = e^0 = 1$$

Vertikalne asimptote: $x=-1,\ x=-3$
Horizontalna asimptota: $y=1$

f) Graf:



□

5. Odrediti domenu, presjeke s koordinatnim osima, ekstreme, asimptote i skicirati graf funkcije $y=\frac{\sqrt{x^2-x}}{4x-3}$.

a) Domena: $4x-3\neq 0$ & $-x+x^2\geq 0$

$x\neq\frac{3}{4}$ $\qquad x(-1+x)\geq 0$

$x\in\langle-\infty,0]\cup[1,\infty\rangle$

$\Rightarrow D=R\setminus\langle 0,1\rangle$

b) Parnost, neparnost: Funkcija nije ni parna ni neparna.

c) Nul točke: $y=0 \;\Rightarrow\; -x+x^2=0 \;\Rightarrow\; x_1=0,\; x_2=1$

Presjeci s osi y: $x=0 \;\Rightarrow\; y=0$

d) Ekstremi:

$$f'(x)=\frac{-1+2x}{2(-3+4x)\sqrt{-x+x^2}}-\frac{4\sqrt{-x+x^2}}{(-3+4x)^2},\quad f'(x)=0\;\Rightarrow\; x=\frac{3}{2}$$

x	-∞	0	1	3/2	+∞
y	↗	P	↗	M	↘
y'	+		+		-

$\Rightarrow$ maksimum $M\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$

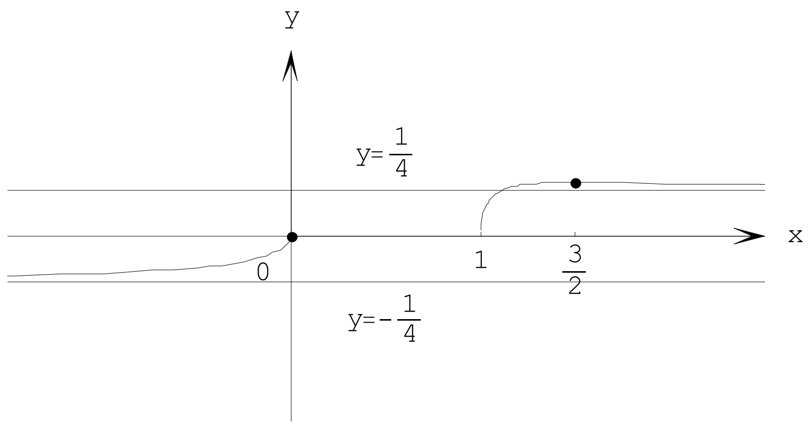
e) Asimptote:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-x}}{4x-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)}}{4x-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{|x|\sqrt{\left(1-\frac{1}{x}\right)}\;/:x}{4x-3\;/:x}=\pm\frac{1}{4}$$

Horizontalne asimptote: $y=\frac{1}{4},\;\; y=-\frac{1}{4}$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=0 \;\Rightarrow$ Nema kose asimptote.

f) Graf



□

6. Ispitati funkciju $f(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}$ i nacrtati njen graf.

a) Domena: $D=R\setminus\{0\}$

b) Parnost, neparnost: $f(x)\neq f(-x)$ $\Rightarrow$ funkcija nije parna

$f(-x)\neq -f(x)$ $\Rightarrow$ funkcija nije neparna

c) Nul točke: $y=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$

Presjeci s osi y: $x=0 \Rightarrow 0\notin D$

d) Ekstremi:

$$f'(x)=e^{\frac{1}{x}}-\frac{e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{2}+x\right)}{x^2}=0 \quad\Rightarrow\quad e^{\frac{1}{x}}\left(1+\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{x}\right)=0$$

Jednadžba $f'(x)=0$ nema realnih rješenja, tj. funkcija nema lokalnih ekstrema.

$f'(x)>0$ $\Rightarrow$ funkcija raste na cijeloj domeni.

e) Infleksija:

$$f''(x)=\frac{e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{2}+x\right)}{x^4}+\frac{2e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{2}x\right)}{x^2}-\frac{2e^{\frac{1}{x}}}{x^2}=\ldots=-\frac{e^{\frac{1}{x}}}{2x^4}$$

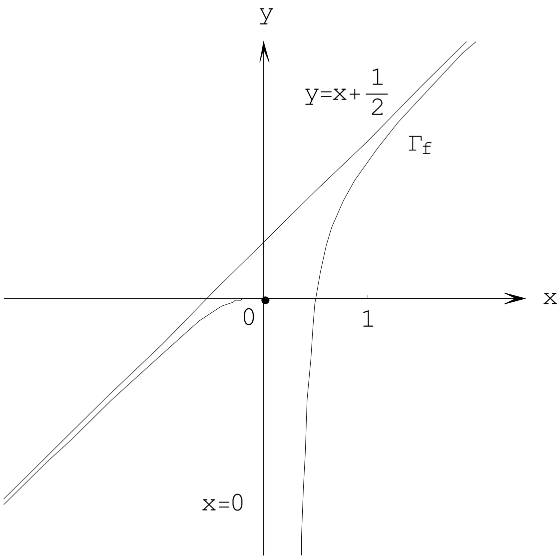
Jednadžba $f''(x)=0$ nema realnih rješenja, tj. funkcija nema točaka infleksije.

f) Asimptote:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-}\left(x-\frac{1}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}=0\\[2ex]\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x-\frac{1}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}=-\infty\end{array}\right\}\quad\Rightarrow\quad \text{Vertikalna asimptota sdesna: } x=0$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)}{x}e^{\frac{1}{x}}=1=k\\[2ex]\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-kx]=\frac{1}{2}=l\end{array}\right\}\quad\Rightarrow\quad \text{Kosa asimptota: } y=x+\frac{1}{2}$$

g) Graf:



□