Definicije, teoremi, formule

1 – REDOVI

1.1: Redovi brojeva

1.1.1. Definicija: Red je uređena dvojka nizova $\left((a_n)_{n\in N},(s_n)_{n\in N}\right)$, pri čemu je.

$(a_n)_{n\in N}$ – niz članova reda
$(s_n)_{n\in N}$ – niz parcijalnih suma reda

Pri tome je $s_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ n-ta parcijalna suma.

1.1.2. Definicija: Red konvergira ako postoji $s = \lim_{n\to\infty} s_n$. Inače red divergira.

U slučaju konvergencije pišemo $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (čitamo "s je suma reda").

Nužan uvjet konvergencije

Ako red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira, onda $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Nije li taj uvjet ispunjen, red je divergentan.

Važno je reći da obrat ne vrijedi tj. ako je limes n-tog člana jednak nuli, red može, ali ne mora konvergirati.

Nužan i dovoljan uvjet konvergencije
(Cauchyev opći kriterij konvergencije)

Red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira onda i samo onda ako

$(\exists n_0 \in N)(\forall p \in N)(\forall n \in N)\left(n > n_0 \rightarrow \left|a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + ... + a_{n+p}.\right| < \in\right).$

Drugim rječima :Red konvergira onda i samo onda ako postoji član reda poslije kojega se suma svakog broja uzetih članova reda može učiniti po volji malena.

Redovi s pozitivnim članovima

1.1.3.Teorem o uspoređivanju :Neka su $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad i \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ redovi s pozitivnim članovima i neka postoji $c > 0$ takav da je $a_n \leq cb_n$, $n \in N$. Tada vrijedi:

1) Konvergencija reda $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ povlači konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < c\sum_{n=1}^{\infty} b_n$;
2) Divergencija reda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ povlači divergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

U praktičnoj upotrebi koristi se modificirana formulacija: Ako su $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad i \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ redovi sa strogo pozitivnim članovima i ako $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l \;\; \& \;\; 0 < l < +\infty$, onda oba reda istodobno konergiraju ili istodobno divergiraju.

D'Alembertov kriterij

Ako $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} l < 1 & \text{red konvergira} \\ l = 1 & \text{neodluceno} \\ l > 1 & \text{red divergira} \end{cases}$

Cauchyev kriterij

Ako $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} l < 1 & \text{red konvergira} \\ l = 1 & \text{neodluceno} \\ l > 1 & \text{red divergira} \end{cases}$.

Cauchyev integralni kriterij

Neka je za $x \geq 1$ funkcija $f(x)$ neprekidna, pozitivna i nerastuća. Tada red brojeva $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ konvergira , ako integral $\int_{1}^{+\infty} f(x)dx$ konvergira , odnosno divergira, ako integral divergira.

Alternirajući redovi

Red $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ konvergira ako je :

1) $a_{n+1} < a_n$ za sve ili počevši od nekog n ; 2) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Drugim rječima red konvergira ako apsolutne vrijednosti njegovih članova čine monotono padajući nulniz.

Apsolutno konvergentni redovi

Ako red $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ konvergira, onda konvergira i red $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.

Ako red $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ divergira , a red $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ konvergira, kažemo da red uvjetno konvergira.

1.2. Redovi funkcija i potencija

1.2.1. Red funkcija $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + .. + f_n(x) + ...$ za različite vrijednosti od x prelazi u različite redove brojeva koji mogu konvergirati ili divergirati.

1.2.2. : Redove oblika $\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n$ i $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^n$ zovemo redovima potencija

Red $f(x)=f(x_0)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ se zove Taylorov red ,

a red $f(x)=f(0)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ se zove Maclaurinov red funkcije f(x).

Taylorov i Maclaurinov red su specijalni slučajevi redova funkcija.

Redovi potencija imaju ova dva važna svojstva :

- Red $\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n$ .možemo derivirati član po član .

  Dobiveni red $\sum_{n=0}^{\infty}nc_n x^{n-1}$ i polazni red $\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n$ imaju isti radijus konvergencije.

- Red $\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n$ možemo integrirati član po član .

  Dobiveni red $\sum_{n=0}^{\infty}c_n\frac{x^{n+1}}{n+1}$ i polazni red $\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n$ imaju isti radijus konvergencije.

Redovi :

$$sin\,x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+...+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+...\text{ i}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{2n!} + \ldots$$

Prelazi jedan u drugi deriviranjem odnosno integriranjem.

Analogno vrijedi i za redove :

$$arctgx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots i$$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots + (-1)^{n+1}x^{2n} + \ldots$$

Radijus konvergencije reda potencija $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ računamo pomoću Cauchyevog ili D'Alembertova kriterija tj.

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}} \quad ili \quad R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$$, respektivno.

1.3. Fourierovi redovi:

1.3.1.Definicija: Periodičnu funkciju $f(x)$ s periodom 2π, razviti u Fourierov red na intervalu $[-\pi,\pi]$ znači prikazati je u obliku

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$, gdje su a_0, a_n, b_n koeficijenti .

Koeficijenti se računaju po formulama :

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx \quad , \quad n = 0,1,2,3...$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx \quad , \quad n = 1,2,3....$$

Ako je funkcija $f(x)$ parna na intervalu $[-\pi,\pi]$ onda je :

$$b_n = 0 \quad , \quad n = 1,2,3.....$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nxdx \quad , \quad n = 0,1,2,3.....$$

Ako je funkcija $f(x)$ neparna na intervalu $[-\pi,\pi]$ onda je :

$a_n = 0 \quad , \quad n = 0,1,2,3.....$

$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx \quad , \quad n = 1,2,3....$

Fourierov red funkcije $f(x)$ na intervalu $[-l,l]$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l})$$

$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx \quad , \quad n = 0,1,2,3.....$

$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx \quad , \quad n = 1,2,3....$

1) Razvoj u red kosinusa
   Razviti funkciju $f(x)$ na intervalu $\langle 0,l \rangle$ u red kosinusa znači razviti u Fouerierov red parnu funkciju s periodom $2l$, koja se na intervalu $\langle 0,l \rangle$ podudara sa $f(x)$.

2) Razvoj u red sinusa
   Razviti funkciju $f(x)$ na intervalu $\langle 0,l \rangle$ u red sinusa znači razviti u Fourierov red neparnu funkciju s periodom $2l$, koja se na $\langle 0,l \rangle$ podudara sa funkcijom $f(x)$.

3) Razvoj neperiodične funkcije u Fourierov red

   Neka je zadana funkcija $f(x)$ na proizvoljnom intervalu $\langle a,b \rangle$
   Pod razvojem u Fourierov red na tom intervalu podrazumijeva se razvoj u Fourierov red periodične funkcije s periodom $2l = b - a$, koja se na intervalu $\langle a,b \rangle$ podudara sa zadanom funkcijom $f(x)$.

2 - DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE

2.0.1. Definicija: Jednadžba oblika $F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$ zove se diferencijalna jednadžba n-tog reda.
2.0.2. Definicija: Svaka funkcija $y = \phi(x)$ za koju vrijedi
$F(x, \phi(x), \phi'(x), \phi''(x), \ldots, \phi^{(n)}(x)) = 0$ zove se rješenje diferencijalne jednadžbe.

Opće rješenje diferencijalne jednadžbe sadrži n-konstanti
i ima oblik $y = f(x, C_1, C_2, \ldots C_n)$ .Konstante se određuju iz početnog uvjeta :
$y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$, $y''(x_0) = y_0''$, $y^{(n)}(x_0) = y_0^{(n)}$ tj.
iz sustava :

$$\begin{cases} y_0 = f(x_0, C_1, C_2, \ldots, C_n) \\ y_0' = f'(x_0, C_1, C_2, \ldots, C_n) \\ . \quad . \quad . \\ y^{(n)}{}_0 = f^{(n)}(x_0, C_1, C_2, \ldots, C_n) \end{cases}$$

2.1. Diferencijalne jednadžbe prvog reda

2.1.1. Definicija: Jednadžba oblika $F(x, y, y') = 0$ zove se diferencijalna jednadžba prvog reda.

2.1.2. Definicija: Svaka funkcija $y = \phi(x)$ za koju vrijedi $F(x, \phi(x), \phi'(x)) = 0$ zove se rješenje diferencijalne jednadžbe.
Opće rješenje diferencijalne jednadžbe sadrži jednu konstantu .
i ima oblik $y = f(x, C_1)$. Konstanta se određuje iz početnog uvjeta: $y(x_0) = y_0$
U geometrijskom smislu to znači da opće rješenje prolazi točkom (x_0, y_0).

Neke od jednadžbi prvog reda :

- **Separirana:**

Ako se jednadžba može zapisati u obliku $y' = f(x)g(y)$ zovemo je jednadžba sa separiranim varijablama. Zapisuje se kao $\frac{dy}{g(y)} = \frac{dx}{f(x)}$ i integrira se izravno.

- **Homogena**

Ako se jednadžba može zapisati u obliku $y' = f(\frac{y}{x})$ zovemo je homogenom .Rješavamo je uvođenjem nove funkcije $u = \frac{y}{x} \rightarrow y' = u + xu'$ i dobivamo jednadžbu sa separiranim varijablama, tj. $xu' = f(u) - u \Leftrightarrow \frac{dx}{x} = \frac{du}{f(u)-u}$ i integrira se izravno.

- **Linearna**

Ako se jednadžba može zapisati u jednom od oblika $y' + P(x)y = Q(x)$ odnosno $x' + P(y)x = Q(y)$ zovemo je linearnom diferencijalnom jednadžbom. Rješava se u dva koraka.
U prvom koraku se rješava homogena jednadžba
$y' + P(x)y = 0 \to y = Ce^{-\int P(x)dx}$.
U drugom koraku se varijacijom kontante određuje opće rješenje nehomogene jednadžbe u obliku $y = C(x)e^{-\int P(x)dx}$, a funkcija $C(x)$ se određuje iz uvjeta da y i y' zadovoljavaju nehomogenu jednadžbu.
Konačno: Opće rješenje linearne jednadžbe je $y = e^{-\int P(x)dx}\left[\int e^{\int P(x)dx}Q(x)dx + C\right]$.

- **Bernoullijeva**

Jednadžba oblika $y' + P(x)y = Q(x)y^n$ zove se Bernoullijeva , a supstitucijom $z = y^{1-n}$ svodi se na linearnu jednadžbu oblika $\frac{z'}{1-n} + P(x)z = Q(x)$

- **Egzaktna**

Ako je za jednadžbu $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ ispunjen uvjet $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ jednadžba se zove egzaktna.
Opće rješenje je funkcija $U(x,y) = C$, koja se može računati po formuli
$U(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(x, y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x, y)dy$ .gdje su x_0 , y_0 pogodno odabrane konstante.

- **Clairaut-ova**

Jednadžba oblika $y = xy' + \psi(y')$, gdje je ψ diferencijabilna funkcija. Rješavamo je diferenciranjem. Opće rješenje $y = Cx + \psi(C)$ geometrijski predstavlja familiju pravaca.
Singularno rješenje se dobiva eliminacijom parametra p iz sustava

$$\begin{cases} x = -\psi'(p) \\ y = xp + \psi(p) \end{cases}.$$

2.2. Diferencijalne jednadžbe drugog reda

2.2.1. Definicija Jednadžba oblika $F(x, y, y', y'') = 0$ zove se diferencijalna jednadžba drugog reda.

2.2.2. Definicija : Svaka funkcija $y=\phi(x)$ za koju vrijedi $F(x,\phi(x),\phi'(x),\phi''(x))=0$ zove se rješenje diferencijalne jednadžbe.

Opće rješenje diferencijalne jednadžbe drugog reda sadrži dvije konstante i ima oblik $y=f(x,C_1,C_2)$. Konstante se određuju iz početnog uvjeta :
$y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y'_0$ tj. Iz sustava :

$$\begin{cases} y_0 &= f(x_0,C_1,C_2) \\ y'_0 &= f'(x_0,C_1,C_2) \end{cases}$$

2.3. Diferencijalne jednadžbe drugog reda s konstantnim koeficijentima

Jednadžba drugog reda $a(x)y''+b(x)y'+c(x)y=g(x)$, može se uz $a(x) \neq 0$ zapisati u obliku $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$. Ako su funkcije $p(x)=p \;\; i \;\; q(x)=q$ konstantne imamo diferencijalnu jednadžbu s konstantnim koeficijentima:
$y''+py'+qy=f(x)$
Rješenje provodimo u dva koraka:
U prvom koraku rješavamo pripadnu homogenu jednadžbu ($f(x)=0$)
$y''+py'+qy=0$
Odredimo njezino opće rješenje. Ono se dobije kao linearna kombinacija dvaju linearno nezavisnih rješenja. i imat će oblik $y_H=C_1y_1+C_2y_2$. Za rješavanje homogene diferencijalne jednadžbe drugog reda s konstantnim koeficijentima pretpostavlja se da tražena funkcija ima oblik $y=e^{rx}$. Uvrštavanjem u jednadžbu dobivamo tzv.karakterističnu jednadžbu

$$r^2+pr+q=0 \rightarrow \begin{cases} r_1 \neq r_2 & \rightarrow & y_1=e^{r_1x} \;\&\; y_2=e^{r_2x} \\ r_1=r_2=r & \rightarrow & y_1=e^{rx} \;\&\; y_2=xe^{rx} \\ r_1=\overline{r_2}=\alpha-i\beta & \rightarrow & y_1=e^{\alpha x}\cos\beta x \;\&\; y_2=e^{\alpha x}\sin\beta x \end{cases}$$

U drugom koraku određujemo posebno rješenje nehomogene jednadžbe.
Ono se traži u obliku $y_P=C_1(x)y_1+C_2(x)y_2$, gdje su y_1,y_2 dva linearno nezavisna rješenja homogene jednadžbe, a funkcije $C_1(x) \; i \; C_2(x)$ određujemo iz sustava

$$\begin{cases} C'_1y_1 + C'_2y_2 = 0 \\ C'_1y'_1 + C'_2y'_2 = f(x) \end{cases}$$

Sustav ima uvijek rješenje jer mu je determinanta determinanta Wronskog i

$W(x)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} \neq 0$, jer su y_1,y_2 linearno nezavisna rješenja homogenog sustava.

Rješavanjem sustava te integriranjem rješenja dobivamo tražene funkcije $C_1(x) \; i \; C_2(x)$
$C_1(x)=f_1(x)+D_1 \qquad i \qquad C_2(x)=f_2(x)+D_2$
Uvrstimo dobivene vrijednosti u $y_P=C_1(x)y_1+C_2(x)y_2$ dobivamo

opće rješenje nehomogene jednadžbe oblika
$y = D_1 y_1 + D_2 y_2 + f_1(x) y_1 + f_2(x) y_2$.
Dakle, opće rješenje po strukturi je oblika
$y = y_H + y_P$ tj.

Opće rješenje je suma općeg rješenja homogene i jednog posebnog rješenja nehomogene jednadžbe.

Ako bismo pogodili posebno rješenje nehomogene jednadžbe , a to je u nekim slučajevima moguće , tada je dovoljno odrediti opće rješenje homogene.

Tabela daje pregled tih slučajeva:

TABELA ZA ODREĐIVANJE PARTIKULARNOG RJEŠENJA
NEHOMOGENE LINEARNE DIF.JEDNADŽBE

Funkcija smetnje $f(x)$	**Karakteristična jednadžba** $\varphi(\lambda) = \lambda^n + p_1\lambda^{n-1}.+.p_n = 0$	**Oblik partikularnog rješenja** $\eta = ?$
$P_m(x)$, $P_m -$ *polinom stpunja m*	$\varphi(0) \neq 0$	$Q_m(x)$
	$\varphi_l(0) = 0$; $l -$ *kratnost nule*	$x^l Q_m(x)$
$e^{\alpha x} P_m(x)$; $\alpha \in R$, $P_m -$ *polinom stupnja m*	$\varphi(\alpha) \neq 0$	$e^{\alpha x} Q_m(x)$
	$\varphi_l(\alpha) = 0$; $l -$ *kratnost* α	$x^l e^{\alpha x} Q_m(x)$
$P_m(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x$	$\varphi(\beta i) \neq 0$	$u_s(x)\cos\beta x + v_s(x)\sin\beta x$
	$\varphi_l(\beta i) = 0$; $l -$ *kratnost* βi	$x^l\left[u_s(x)\cos\beta x + v_s(x)\sin\beta x\right]$
$e^{\alpha x}\begin{bmatrix} P_m(x)\cos\beta x \\ + Q_n(x)\sin\beta x \end{bmatrix}$	$\varphi(\alpha + \beta i) \neq 0$	$e^{\alpha x}\left[u_s(x)\cos\beta x + v_s(x)\sin\beta x\right]$
	$\varphi_l(\alpha + \beta i) = 0$; $l -$ *kratnost* $\alpha + \beta i$	$x^l e^{\alpha x}\left[u_s(x)\cos\beta x + v_s(x)\sin\beta x\right]$

Legenda:

s = max(m,n);

n=3 & $\varphi(\lambda) \equiv \lambda^3 + p_1\lambda^2 + p_2\lambda + p_3 = 0$ & l = najviše 3

Polinomi $u_s(x)$; $v_s(x)$ - polinomi s neodređenim koeficijentima, koji se određuju iz uvjeta da η zadovoljava danu jednadžbu.

2.4. Sustavi linearnih diferencijalnih jednadžbi

Ovdje ćemo promatrati sustave linearnih diferencijalnih jednadžbi s konstantnim koeficijentima

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax + by + f(t) \\ \dfrac{dy}{dt} = cx + dy + g(t) \end{cases}$$

gdje su a, b, c, d - konstante, a $x = x(t)$ i $y = y(t)$ - tražene funkcije.
Ako su funkcije $f(t)$ i $g(t)$ jednake nuli, sustav zovemo homogeni sustav. Inače radi se o nehomogenom sustavu.
Sustav možemo rješavati na više načina, a ovdje ćemo se ograničiti na dva

a) metoda eliminacije
b) matrična metoda

Opišimo ukratko obje metode:

a) metoda eliminacije

Metoda eliminacije sustav svodi na jednu jednadžbu, ovdje, drugog reda s konstantnim koeficijentima.
Ako iz prve jednadžbe izrazimo traženu funkciju y=y(t) dobivamo :

$$y = \frac{1}{b}\left(\frac{dx}{dt} - ax - f(t)\right) \to \frac{dy}{dt} = \frac{1}{b}\left(\frac{d^2x}{dt^2} - a\frac{dx}{dt} - f'(t)\right)$$

Uvrstimo y i $\dfrac{dy}{dt}$ u drugu jednadžbu sljedi :

$$\frac{1}{b}\left(\frac{d^2x}{dt^2} - a\frac{dx}{dt} - f'(t)\right) = cx + \frac{d}{b}\left(\frac{dx}{dt} - ax - f(t)\right) + g(t).$$

Dobili smo diferencijalnu jednadžbu drugog reda s konstantnim koeficijentima za traženu funkciju x=x(t). Imamo, dakle :

$$\frac{1}{b}\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{1}{b}(a + d)\frac{dx}{dt} + \left(\frac{ad}{b} - c\right)x + \frac{1}{b}\left(-f'(t) + df(t)\right) - g(t) = 0$$

ili

$$\frac{d^2x}{dt^2} + p\frac{dx}{dt} + qx = r(t)$$

gdje su : $p = -(a + d)$, $q = ad - bc$, $r(t) = bg(t) - df(t) + f'(t)$.

Riješimo li jednadžbu $\dfrac{d^2x}{dt^2} + p\dfrac{dx}{dt} + qx = r(t)$ dobivamo opće rješenje.
Dakle tražena je funkcije $x = x(t, C_1, C_2)$.

Da bismo odredili drugu traženu funkciju y=y(t) deriviramo opće rješenje $x = x(t, C_1, C_2)$ i uvrstimo u jednadžbu $y = \frac{1}{b}(\frac{dx}{dt} - ax - f(t))$. Izlazi $y = y(t, C_1, C_2)$.

Prema tome dobili smo opće rješenje polaznog sustava

$$\begin{cases} x = x(t, C_1, C_2) \\ y = y(t, C_1, C_2) \end{cases}$$

<u>2.4.1.Primjer:</u>

Riješiti sustav $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = y - z & (1) \\ \frac{dz}{dx} = -4y + z & (2) \end{cases}$

Tražene funkcije su $y = y(x)\ i\ z = z(x)$

Iz prve jednadžbe je $z = y - \frac{dy}{dx} \to \frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dx} - \frac{d^2y}{dx^2}$.

Uvrstimo $z\ i\ \frac{dz}{dx}$ u drugu jednadžbu dobivamo diferencijalnu jednadžbu za traženu funkciju $y = y(x)$ tj. $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = 0$, čije je opće rješenje je oblika $y(x) = C_1e^{-x} + C_2e^{3x}$.

Iz prve jednakosti sljedi $z = y - \frac{dy}{dx}$. Uvrstimo u posljednju jednakost $y(x)\ \ i\ \ y'(x)$ dobivamo :

$z(x) = C_1e^{-x} + C_2e^{3x} + C_1e^{-x} - 3C_2e^{3x} = 2C_1e^{x} - 2C_2e^{3x}$.

Dakle, za proizvoljne konstante $C_1\ i\ C_2$ sustav jednadžbi

$$\begin{cases} y = C_1e^{-x} + C_2e^{3x} \\ z = 2C_1e^{-x} - 2C_2e^{3x} \end{cases}$$

je opće rješenje polaznog sustava.

Rješenje Cauchyjevog problema u ovom slučaju svodi se na rješavanje sustava

$$\begin{cases} y_0 = C_1e^{-x_0} + C_2e^{3x_0} \\ z_0 = 2C_1e^{-x_0} - 2C_2e^{3x_0} \end{cases}$$

Determinanta sustava $\Delta = \begin{vmatrix} e^{-x_0} & e^{3x_0} \\ 2e^{-x_0} & -2e^{3x_0} \end{vmatrix} = 2e^{2x_0}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4e^{2x_0}$ različita je od nule za svaku vrijednost x_0. Prema tome za bilo koje vrijednosti $y_0\ i\ z_0$ sustav

$\begin{cases} y_0 = C_1e^{-x_0} + C_2e^{3x_0} \\ z_0 = 2C_1e^{-x_0} - 2C_2e^{3x_0} \end{cases}$ ima jedinstveno rješenje.

b) matrična metoda

Sustav $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax + by + f(t) \\ \dfrac{dy}{dt} = cx + dy + g(t) \end{cases}$ zapišimo u matričnom obliku bit će

$$\begin{pmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix}$$

Općenito je taj zapis oblika $\dot{X}(t) = A(t)X(t) + F(t)$.

U našem slučaju matrica $A(t) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ je matrica konstanti.

Metodama linearne algebre možemo odrediti fundamentalni sustav rješenja $X_k(t)$, $k = 1,2$ homogenog sustava

$\begin{pmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Uobičajeni zapis sustava je $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Iz karakteristične jednadžbe $\det(A - \lambda I) = 0$ dobivamo rješenja λ_1 , λ_2. Uzimajući u obzir višestrukost od λ i odgovarajuće posebno rješenje $X^{(\lambda)}(t)$ je određeno. Opće rješenje homogenog sustava je

$$X(t) = C_1 X^{(\lambda_1)}(t) + C_2 X^{(\lambda_2)}(t).$$

Pri rješavanju karakteristične jednadžbe mogu nastupiti sljedeći slučajevi :

Prvi slučaj:

λ je jednostruki realni korijen.

Tada je $X^{(\lambda)}(t) = Y^{(\lambda)} e^{\lambda t} = \begin{pmatrix} y_1^{\lambda} \\ y_2^{\lambda} \end{pmatrix} e^{\lambda t}$ gdje je $Y^{(\lambda)}$ svojstveni vektor matrice A koji odgovara svojstvenoj vrijednosti λ, tj. $AY^{(\lambda)} = \lambda Y^{(\lambda)}$, $Y^{(\lambda)} \neq 0$.

<u>2.4.2.Primjer</u>: Riješiti sustav za početni uvjet x(0)=6 , y(0)=-6 , z(0)=24.

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x + y \\ \dot{y} = 3x + 2y \\ \dot{z} = 2x + 3y + 4z \end{cases}$$

Karakteristična jednadžba $det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & 0 \\ 3 & 2-\lambda & 0 \\ 2 & 3 & 4-\lambda \end{vmatrix}=0$ ima korijene

$\lambda_1=1, \lambda_2=4, \lambda_3=5$

Svojstveni vektori : $Y^{(\lambda_1)}=\begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 7 \end{pmatrix}, Y^{(\lambda_2)}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, Y^{(\lambda_3)}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

Dakle, bit će :

$X^{(\lambda_1)} = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 7 \end{pmatrix} e^t$, $X^{(\lambda_2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t}$, $X^{(\lambda_3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} e^{5t}$ pa je opće rješenje

$$X(t)=C_1X^{(\lambda_1)}+C_2X^{(\lambda_2)}+C_3X^{(\lambda_3)}=C_1\begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 7 \end{pmatrix}e^t+C_2\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}e^{4t}+C_3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}e^{5t}$$

Da bismo odredili posebno rješenje, konstante C_1, C_2, C_3 određujemo iz sustava

$$X(0) = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 24 \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 7 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3C_1 & & + \ C_3 \\ -\ 9C_1 & & + \ C_3 \\ 7C_1 & + \ C_2 & + \ 5C_3 \end{pmatrix}$$

Slijedi da je : $C_1=1$, $C_2=2$, $C_3=3$

Tako dobivamo posebno rješenje oblika:

$$X(t)=1X^{(\lambda_1)}+2X^{(\lambda_2)}+3X^{(\lambda_3)}=\begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 7 \end{pmatrix}e^t+\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}e^{4t}+\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 15 \end{pmatrix}e^{5t}$$

Drugi slučaj:

λ je jednostruki kompleksni korijen. Tada je i $\bar{\lambda}$ korijen karakteristične jednadžbe . Umjesto kompleksnih partikularnih rješenja $X^{(\lambda)}$ i $X^{(\bar{\lambda})}$ uzimamo realna partikularna rješenja $X^{(\lambda)}(t)=Re\,X^{(\lambda)}(t)$ i $X^{(\bar{\lambda})}(t)=Im\,X^{(\bar{\lambda})}(t)$

2.4.3.Primjer

Odrediti opće rješenje sustava : $\begin{cases} \dot{x} = x + y \\ \dot{y} = -2x + 3y \end{cases}$

Karakteristična jednadžba $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$ ima korijene $\lambda_{1,2} = 2 \pm i$

Da bismo odredili svojstveni vektor koji odgovara korijenu $\lambda = 2+i$ dobivamo sustav

$$\begin{cases} (-1-i)y_1^{(\lambda)} & + y_2^{(\lambda)} & = & 0 \\ -2y_1^{(\lambda)} & (1-i)y_2^{(\lambda)} & = & 0 \end{cases}$$

Stavimo li $y_1^{(\lambda)} = 1$ dobivamo $y_2^{(\lambda)} = 1+i$ tj. $Y^{(\lambda)} = \begin{pmatrix} y_1^{(\lambda)} \\ y_2^{(\lambda)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix}$, onda je

$$X^{(\lambda)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} e^{(2+i)t}$$

Odgovarajući par realnih partikularnih rješenja je :

$$X_1^{(\lambda)}(t) = Re\begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} e^{(2+i)t} = \begin{pmatrix} e^{2t}\cos t \\ e^{2t}(\cos t - \sin t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix} e^{2t}$$

$$X_2^{(\lambda)}(t) = Im\begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} e^{(2+i)t} = \begin{pmatrix} e^{2t}\sin t \\ e^{2t}(\cos t + \sin t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix} e^{2t}$$

Konačno je opće rješenje ;

$$X(t) = C_1 X_1^{(\lambda)}(t) + C_2 X_2^{(\lambda)}(t) = \begin{pmatrix} C_1 \cos t + C_2 \sin t \\ (C_1 + C_2)\cos t + (C_2 - C_1)\sin t \end{pmatrix} e^{2t}$$

Treći slučaj:

λ je korijen karakteristične jednadžbe višestrukosti $r \geq 2$

Rješenje sustava koje odgovara tome korijenu traži se u obliku

$$X^{\lambda}(t) = \begin{pmatrix} a_1^{(1)} & +a_1^{(2)}t + & \ldots\ldots & +a_1^{(r)}t^{r-1} \\ a_2^{(1)} & +a_2^{(2)}t + & \ldots\ldots & +a_2^{(r)}t^{r-1} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_n^{(1)} & +a_n^{(2)}t + & \ldots\ldots & +a_n^{(r)}t^{r-1} \end{pmatrix} e^{\lambda t}$$

gdje se koeficijenti $a_i^{(j)}$, $i = 1,2,\ldots, n$; $j = 1,2,\ldots, r$ određuju iz sustava linearnih jednadžbi koji se dobiva izjednačavanjem koeficijenata istih potencija od t dobivenih supstitucijom vektora $X^{\lambda}(t)$ u jednadžbu $\dot{X}(t) = A(t)X(t)$

2.4.4.Primjer:

Odrediti opće rješenje sustava : $\begin{cases} \dot{x} & = & 2x - y \\ \dot{y} & = & 4x + 6y \end{cases}$

Karakteristična jednadžba $\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 4 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-4)^2 = 0$ ima dvostruki korijen $\lambda = 4$

Rješenje danog sustava tražimo u obliku

$$X^{\lambda}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 t \\ a_2 + b_2 t \end{pmatrix} e^{4t}$$

Uvrstimo $x(t) = (a_1 + b_1 t)e^{4t}$, $y(t) = (a_2 + b_2 t)e^{4t}$ u polazni sustav dobivamo:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} t = \begin{pmatrix} 2a_1 - a_2 \\ 4a_1 + 6a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2b_1 - 4b_2 \\ 4b_1 + 6b_2 \end{pmatrix} t .$$

Izjednačimo li koeficijente istih potencija od t dobivamo ;

$$\begin{cases} b_1 & +2a_1 & +a_2 & = & 0 \\ b_2 & -4a_1 & -2a_2 & = & 0 \\ 2b_1 & +b_2 & & = & 0 \\ -2b_2 & -4b_1 & & = & 0 \end{cases}$$

Ako stavimo $a_1 = C_1$ i $b_1 = C_2$ dobivamo $a_2 = -2C_1 - C_2$ i $b_2 = -2C_2$

Prema tome opće rješenje sustava je oblika :

$$X(t) = X^{(\lambda)}(t) = \begin{pmatrix} C_1 + C_2 t \\ -(2C_1 + C_2) - 2C_2 t \end{pmatrix} e^{4t}$$

Konačno, promatrajmo nehomogeni sustav

$\dot{X}(t) = A(t)X(t) + F(t)$

Tada, ako je poznat fundamentalni sustav rješenja homogenog sustava

$\dot{X}(t) = A(t)X(t)$,

opće rješenje nehomogenog sustava tražimo metodom varijacije konstanti.

Naime, stavljajući $X(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k(t)X_k(t)$ određujemo funkcije $C_k(t)$ uz pretpostavku da vrijedi $\dot{X}(t) - A(t)X(t) = 0$. Dolazimo do sustava jednadžbi po $\dot{C}_k(t)$:

Imamo:

$$\sum_{k=1}^{n} \dot{C}_k(t)X_k(t) = F(t)$$

Iz ovog sustava nalazimo da je $\dot{C}_k(t) = \varphi_k(t)$ i integrirajući dobivamo funkcije

$C_k(t) = \psi_k(t) + D_k$, gdje su D_k konstante. integracije

Konačno, opće rješenje nehomogenog sustava je oblika :

$$X(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k(t)X_k(t) = \sum_{k=1}^{n} \left(\psi_k(t) + D_k\right) X_k(t) .$$

Označimo: $X_H(t) = \sum_{k=1}^{n} D_k(t)X_k(t)$ i $X_P(t) = \sum_{k=1}^{n} \psi_k(t)X_k(t)$ .Tada možemo pisati

$X(t) = X_H(t) + X_P(t)$
Drugim riječima opće rješenje je prikazano kao suma općeg rješenja homogenog i partikularnog rješenja nehomogenog sustava.

2.4.5.Primjer:
Naći opće rješenje sustava: $\dot{X}(t) = AX(t) + F(t)$, ako su

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad i \quad F = \begin{pmatrix} t+1 \\ 2t \end{pmatrix} e^{3t}$$

Karakteristična jednadžba $\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2 = 0$ ima dvostruki korijen $\lambda = 3$.

Rješenje homogenog sustava tražimo u obliku $X_H(t) = \begin{pmatrix} at+b \\ ct+d \end{pmatrix} e^{3t}$. Nakon uvrštavanja u homogeni sustav i kraćenja s e^{3t} dobivamo :

$$3\begin{pmatrix} at+b \\ ct+d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} at+b \\ ct+d \end{pmatrix}$$

ili

$$\begin{pmatrix} 3at+a+3b \\ 3ct+c+3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2a-c)t+2b-d \\ (a+4c)t+b+4d \end{pmatrix}$$

Dobivamo $a = -c \quad i \quad -(a+b) = d$. Stavimo li $a = C_1 \quad i \quad b = C_2$ proizlazi $c = -C_1$, $d = -(C_1 + C_2)$
Tada je opće rješenje homogenog sustava

$$X_H(t) = \begin{pmatrix} C_1 t + C_2 \\ -C_1 t - (C_1 + C_2) \end{pmatrix} e^{3t}$$

Partikularno rješenje tražimo u obliku

$$X_P(t) = t\begin{pmatrix} At^2 + Bt + C \\ Dt^2 + Et + F \end{pmatrix} e^{3t}.$$

Nakon uvrštavanja u sustav i uspoređivanja koeficijenata uz iste potencije od t, dobivamo koeficijente
$A = -0.5,\ B = 0,\ C = 1,\ D = 0.5,\ E = 1.5,\ F = 0$

Konačno, partikularno rješenje je : $X_P(t) = t\begin{pmatrix} -0.5t^2 + 1 \\ 0.5t^2 + 1.5t \end{pmatrix} e^{3t}$

Opće rješenje nehomogenog sustava je:

$$X(t) = X_H(t) + X_P(t) = \begin{pmatrix} C_1 t + C_2 - 0.5t^3 + t \\ -C_1 t - (C_1 + C_2) + 0.5t^3 + 1.5t^2 \end{pmatrix} e^{3t}$$

3 - VEKTORSKA ANALIZA

Vektorska funkcija:

- $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$

gdje su x(t),y(t) i z(t) skalarne funkcije.

Derivacija vektorske funkcije:

- $\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$.

Svojstva deriviranja:

- 1) $\vec{c}$ -konstantan vektor $\frac{d\vec{c}}{dt} = 0$.
- 2) $\frac{d(\vec{a}(t) \pm \vec{b}(t))}{dt} = \frac{d(\vec{a}(t))}{dt} \pm \frac{d(\vec{b}(t))}{dt}$.
- 3) $\frac{d(\vec{a}(t) \cdot \vec{b}(t))}{dt} = \frac{d(\vec{a}(t))}{dt} \cdot \vec{b}(t) + \vec{a}(t) \cdot \frac{d(\vec{b}(t))}{dt}$.
- 4) $\frac{d(\vec{a}(t) \times \vec{b}(t))}{dt} = \frac{d(\vec{a}(t))}{dt} \times \vec{b}(t) + \vec{a}(t) \times \frac{d(\vec{b}(t))}{dt}$.

Jednadžba tangente na krivulju $\vec{r} = \vec{r}(t)$ **u točki** $t = t_0$

- $\vec{r} = \vec{r}\,'(t_0)(t - t_0) + \vec{r}(t_0)$.

ili u skalarnom obliku

- $\frac{x - x(t_0)}{\dot{x}(t_0)} = \frac{x - y(t_0)}{\dot{y}(t_0)} = \frac{x - z(t_0)}{\dot{z}(t_0)}$.

ili u parametarsko obliku

- $x = x(t_0) + t\,\dot{x}(t_0)$, $y = y(t_0) + t\,\dot{y}(t_0)$, $z = z(t_0) + t\,\dot{z}(t_0)$.

gdje je t parametar.

Gradijent skalarnog polja $f = f(x, y, z)$

- $gradf = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$.

Derivacija skalarnog polja $f(x, y, z)$ **u smjeru vektora** $\vec{s}$

- $\frac{\partial f}{\partial \vec{s}} = gradf \cdot \vec{s}^{\,0} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma$.

Divergencija vektorskog polja $\vec{a} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$

- $div\vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$.

Vektorsko polje je solenoidalno , ako je $div\vec{a} = 0$.

Rotacija vektorskog polja $\vec{a} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$

- $$rot\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}$$

Polje je potencijalno (konzervativno) na konveksnoj domeni Ω ako i samo ako je $rot\vec{a} = 0$

Greenova formula

- $$\int_C Pdx + Qdy = \iint_S \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right] dxdy$$

gdje je C rub područja D, kojeg zatvara krivulja C..Krivulja se obilazi u pozitivnom smjeru..

Površina područja u ravnini omeđenog krivuljom C

- $$S = \frac{1}{2}\oint_C (xdy - ydx)$$

Duljina luka krivulje $\vec{r} = \vec{r}(t)$

- $$s = \int_{s_1}^{s_2} ds = \int_{t_1}^{t_2} |\vec{r}\,'(t)| dt$$

pritom je element luka ds jednak :

- 1) $ds = |r'(t)| = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}dt$ za krivulju u ravnini
- 2) $ds = |r'(t)| = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)}dt$ za krivulju u prostoru

Cirkulacija vektorskog polja $\vec{a} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$

duž zatvorene krivulje C

- $$\oint_C \vec{a} \cdot d\vec{r} = \oint_C Pdx + Qdy + Rdz$$

Tok vektorskog polja $\vec{a} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$ kroz zatvorenu plohu S

- $$\iint_S (\vec{a} \cdot \vec{n}^0) dS = \iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

gdje je $\vec{n}^0$ jedinični vektor normale plohe S

Vektor normale $\vec{n}^0$ računa se po formuli :

$$\vec{n}^0 = \frac{grad[f(x,\ y) - z]}{\|grad[f(x,\ y) - z]\|} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} - \vec{k}}{\pm\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}$$

ako je ploha zadana jednadžbom $z = f(x,\ y)$

odnosno po formuli

$$\vec{n}^0 = \frac{grad[f(x,\ y,\ z)]}{\|grad[f(x,\ y,\ z)]\|} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}}{\pm\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}},$$

ako je ploha zadana implicitno jednadžbom $f(x,y,z)=0$

Formula Green-Gauss-Ostrogradskog (teorem o divergenciji)

- $\iint\limits_S (\vec{a}\cdot\vec{n}^0)dS = \iiint\limits_V div\vec{a}dV$

gdje je V zatvoreno područje omeđeno zatvorenom po dijelovima glatkom plohom S, koja samu sebe ne presijeca. Ploha je orijentirana vanjskom normalom.

Orijentacija plohe i krivulje na plohi

S^+ - po dijelovima glatka ploha orijentirana vanjskom normalom , čiji rub $\partial S = C^+$ je po dijelovima glatka jednostavno zatvorena orijentirana krivulja.

Da su orijentacija plohe i orijentacija krivulje na plohi kompatibilne, znači da promatrajući s vrha normale $\vec{n}^0 = \cos\alpha\ \vec{i} + \cos\beta\ \vec{j} + \cos\gamma\ \vec{k}$ plohe S^+, obilaženje po krivulji C^+ je suprotno kazaljci na satu tj. krivulja je pozitivno orijentirana. Treba reći da se to postiže izborom rastućeg ili padajućeg parametra (vidi zadatak 2.5 str.32 ,33)

Analogno imamo:

S^- - negativna orijentacija plohe prema unutarnjoj normali i C^--negativna orijentacija krivulje. tj.obilaženje u smjeru kazaljke na satu.

Stokesova formula

Neka je polje $\vec{a}$ klase C^1 na području koje sadrži otvorenu plohu S, čiji rub $\partial S = C$ je jednostavna Jordanova zatvorena krivulja.Tada vrijedi

$$\oint\limits_C \vec{a}\cdot d\vec{r} = \iint\limits_S (rot\vec{a}\cdot\vec{n}^0)dS$$

Jednostavna krivulja $\vec{r} = \vec{r}(t)$ je Jordanov luk ako se ne presjeca i ima derivaciju $\vec{r}' = \vec{r}'(t) \neq 0$.

Da je polje $\vec{a}$ klase C^1 znači da su komponente $P(x,\ y,\ z),\ Q(x,\ y,\ z),\ R(x,\ y,\ z)$ polja $\vec{a}$ neprekidne i da imaju neprekidne prve parcijalne derivacije .