PISMENI ISPITI IZ MATEMATIKE III

pismeni br 1

1.1: Razviti u Fourierov red funkciju $f(x)=|x|$ s periodom 4 na intervalu $[-2,\ 2]$.

1.2: Provjeriti da elipsa $\vec{r}(t)=\frac{a}{\sqrt{2}}\cos t\,\vec{i}+\frac{b}{2}(\sin t-1)\,\vec{j}+\frac{c}{2}(\sin t+1)\,\vec{k}$ leži na elipsoidu $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ i odrediti derivaciju skalarne funkcije $u(x,y,z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$ u smjeru tangente na elipsu u točki maximalne apscise.

1.3: Odrediti opće i singuarno rješenje jednadžbe $y=xy'+\sqrt{-4y'}$.

1.4: Varijacijom konstanata odrediti opće rješenje jednadžbe $y''+4y'+4y=\frac{e^{-2x}}{x^3}$.

1.5: Odrediti cirkulaciju vektora $\vec{a}=-y^3\,\vec{j}+x^3\,\vec{k}$ duž elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

1.6: Odrediti tok vektora $\vec{a}=-y^3\,\vec{j}+x^3\,\vec{k}$ kroz zatvorenu plohu koju omeđuju $x^2+y^2=4\,;x^2+y^2=z\,;z=0$ u smjeru vanjske normale

RJEŠENJA

1.1: Razviti u Fourierov red funkciju $f(x)=|x|$ s periodom 4 na intervalu $[-2,\,2]$.

Stoga što je funkcija parna u razvoju će imati samo koeficijente uz kosinuse.

$$a_0=\frac{2}{2}\int_0^2 x\,dx=\frac{x^2}{2}\Big|_0^2=2$$

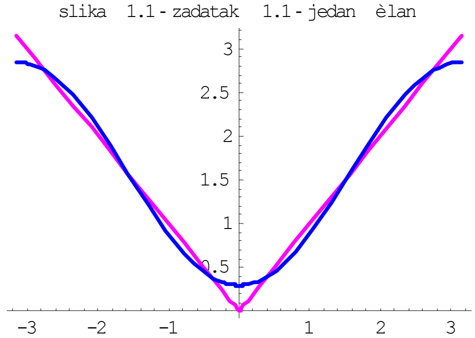
$$a_n=\int_0^2 x\cos\frac{n\pi x}{2}dx=\int_0^2 x\,d\left(\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\right)=\frac{2}{n\pi}\int_0^2 x\,d\left(\sin\frac{n\pi x}{2}\right)$$

$$=\frac{2}{n\pi}\left[x\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2-\int_0^2\sin\frac{n\pi x}{2}dx\right]=\frac{4}{n^2\pi^2}(\cos n\pi-1)$$

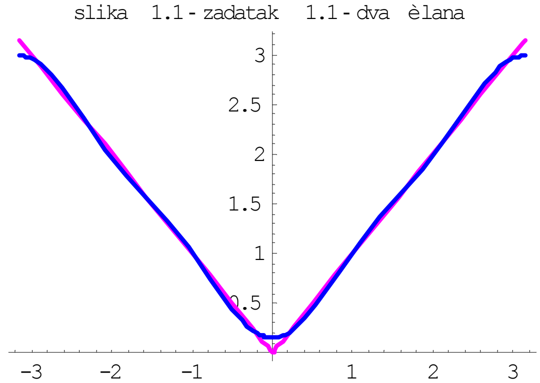
$$=\frac{4}{n^2\pi^2}\left[(-1)^n-1\right]=\begin{cases}-\dfrac{8}{n^2\pi^2} & za\quad n=2k-1\\ 0 & za\quad n=2k\end{cases}$$

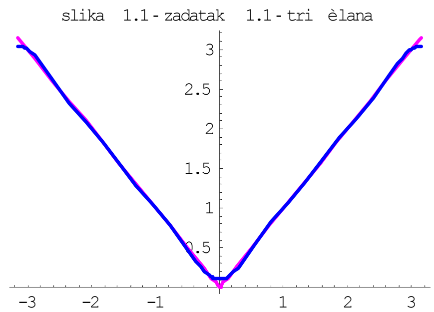
dake, $|x|=1-\dfrac{8}{\pi^2}\left[\dfrac{\cos\frac{\pi x}{2}}{1^2}+\dfrac{\cos\frac{3\pi x}{2}}{3^2}+\dfrac{\cos\frac{5\pi x}{2}}{5^2}+\dfrac{\cos\frac{7\pi x}{2}}{7^2}+\cdots\right].$

slika 1.1 - zadatak 1.1 - jedan èlan



slika 1.1 - zadatak 1.1 - dva èlana





1.2: Provjeriti da elipsa $\vec{r}(t) = \frac{a}{\sqrt{2}} \cos t\, \vec{i} + \frac{b}{2}(\sin t - 1)\, \vec{j} + \frac{c}{2}(\sin t + 1)\, \vec{k}$ leži na elipsoidu $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ i odrediti derivaciju skalarne funkcije $u(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ u smjeru tangente na elipsu u točki maximalne apscise.

Skalarne komponente vektora $\vec{r}$ su : $x = \frac{a}{\sqrt{2}} \cos t$, $y = \frac{b}{2}(\sin t - 1)$, $z = \frac{c}{2}(\sin t + 1)$

Sljedi da je : $\frac{x}{a} = \frac{\cos t}{\sqrt{2}}$, $\frac{y}{b} = \frac{\sin t - 1}{2}$, $\frac{z}{c} = \frac{\sin t + 1}{2}$

Kvadriranjem i zbrajanjem dobivamo

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ Dakle, krivulja je na elipsoidu.

Točka maximalne apscise dobije se za $t = 0$, pa su njezine koordinate $T(\frac{a}{\sqrt{2}}, -\frac{b}{2}, \frac{c}{2})$.

Jednadžba tangente u točki T na elipsu je $\dfrac{x - \frac{a}{\sqrt{2}}}{-\frac{a}{\sqrt{2}} \sin t} = \dfrac{y + \frac{b}{2}}{\frac{b}{2} \cos t} = \dfrac{z - \frac{c}{2}}{\frac{c}{2} \cos t}$

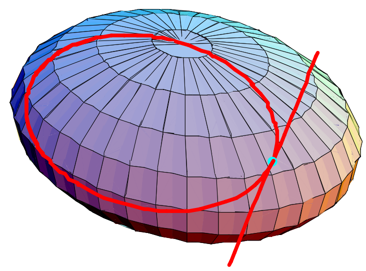
Vektor smjera tangente u točki T je $\vec{t} = (0, \frac{b}{2}, \frac{c}{2})$. Norma vektora $|\vec{t}| = \frac{2}{\sqrt{b^2 + c^2}}$, pa je

jedinični vektor $\vec{t}^{\,0} = (0, \frac{b}{\sqrt{b^2 + c^2}}, \frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}})$.

$$grad u\big|_T = u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k}\,\Big|_T = \frac{2x}{a^2}\vec{i} + \frac{2y}{b^2}\vec{j} + \frac{2z}{c^2}\vec{k}\,\Big|_T = \frac{\sqrt{2}}{a}\vec{i} - \frac{1}{b}\vec{j} + \frac{1}{c}\vec{k}$$

Konačno : $grad u\big|_T \cdot \vec{t}^{\,0} = \frac{-1}{\sqrt{b^2 + c^2}} + \frac{1}{\sqrt{b^2 + c^2}} = 0$

slika 1.2-zadatak 1.2

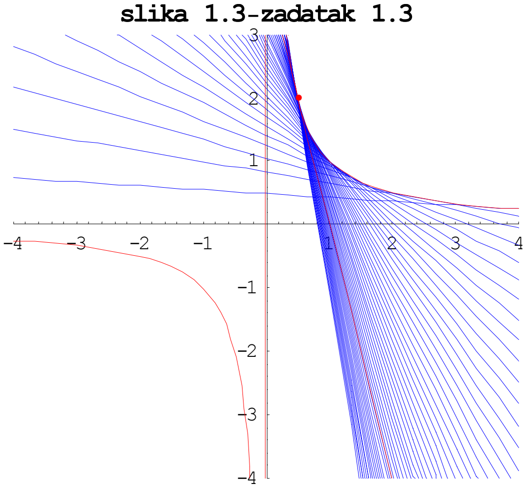


1.3: Odrediti opće i singuarno rješenje jednadžbe $y = xy' + \sqrt{-4y'}$.

Stavimo $y' = p$ jednadžba postaje $y = xp + \sqrt{-4p}$.
Deriviranjem po x dobivamo
$p = p + x\dfrac{dp}{dx} - \dfrac{4}{2\sqrt{-4p}}\dfrac{dp}{dx}$ ili $\dfrac{dp}{dx}(x - \dfrac{2}{\sqrt{-4p}}) = 0$

Ako je $\dfrac{dp}{dx} = 0$, onda je $p = C$, to daje opće rješenje $y = Cx + \sqrt{-4C}$, gdje je $C < 0$, konstanta.
Ako je $x - \dfrac{2}{\sqrt{-4p}} = 0$, tada je $p = y' = -\dfrac{1}{x^2}$. Integriranjem dobivamo singularno rješenje $y = \dfrac{1}{x}$ (vidi sliku 1.3)

slika 1.3-zadatak 1.3



1.4: Varijacijom konstanata odredi opće rješenje jednadžbe $y'' + 4y' + 4y = \dfrac{e^{-2x}}{x^3}$.

Karakteristična jednadžba $r^2+4r+4=0$ ima dvostruki korijen $r_1=r_2=-2$,
pa su $y_1=e^{-2x}$ i $y_2=xe^{-2x}$ rješenja homogene jednadžbe.
Opće rješenje homogene jednadžbe je $y=C_1e^{-2x}+C_2xe^{-2x}$.

Opće rješenje nehomogene jednadžbe tražimo u obliku
$y=C_1(x)e^{-2x}+C_2(x)xe^{-2x}$,gdje funkcije $C_1\ (x)$ i $C_2(x)$ određujemo iz sustava

$$\begin{cases} C_1'(x)e^{-2x} & +C_2'(x)xe^{-2x} & = & 0 \\ -2C_1'(x)e^{-2x} & +C_2'(x)(1-2x)e^{-2x} & = & \dfrac{e^{-2x}}{x^3} \end{cases},$$

ili kraće

$$\begin{cases} C_1' & +C_2'x & = & 0 \\ -2C_1' & +C_2'(1-2x) & = & \dfrac{1}{x^3} \end{cases}$$

Rješenje sustava $(C_1', C_2')=(-\frac{1}{x^2},\frac{1}{x^3})$. Integriranjem dobivamo

$C_1(x)=\frac{1}{x}+D_1$, $C_2(x)=-\frac{1}{2x^2}+D_2$, gdje su D_1 i D_2 konstante integracije.

Konačno, opće rješenje nehomogene jednadžbe

$$y=C_1(x)e^{-2x}+C_2(x)xe^{-2x}=D_1e^{-2x}+D_2xe^{-2x}+\frac{e^{-2x}}{2x}$$

1.5: Odredi cirkulaciju vektora $\vec{a}=-y^3\,\vec{j}+x^3\,\vec{k}$ duž elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Kako su vektori $\vec{a}=-y^3\vec{i}+x^3\vec{j}$ i $d\vec{r}=dx\,\vec{i}+dy\,\vec{j}$ to je $\vec{a}\cdot d\vec{r}=-y^3dx+x^3dy$
Nadalje, sa
$x=a\cos t$ i $y=b\sin t$;$dx=-a\sin t dt$ i $dy=b\cos t dt$, slijedi

$$\oint_E \vec{a}\cdot d\vec{r}=\oint_E -y^3dx+x^3dy=ab\int_0^{2\pi}(b^2\sin^4 t+a^2\cos^4 t)dt.$$

Kako su

$$\int_0^{2\pi}\sin^4 t dt=\left[\frac{3}{8}t-\frac{1}{4}\sin 2t+\frac{1}{32}\sin 4t\right]\Big|_0^{2\pi}=\frac{3}{4}\pi, \text{ i}$$

$$\int_0^{2\pi}\cos^4 t dt=\left[\frac{3}{8}t+\frac{1}{4}\sin 2t+\frac{1}{32}\sin 4t\right]\Big|_0^{2\pi}=\frac{3}{4}\pi$$

konačno je $\oint_E \vec{a}\cdot d\vec{r}=\frac{3ab}{4}(a^2+b^2)\pi$.

Zadatak možemo riješiti i na drugi način, primjenom Stokesova poučka

$$\oint \vec{a}\cdot d\vec{r} = \iint rot\vec{a}\cdot \vec{n}^0 ds$$

$$rot\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y^3 & x^3 & 0 \end{vmatrix} = 3(x^2+y^2)\vec{k} \quad ,\vec{n}=\vec{k} \quad ,rot\vec{a}\cdot\vec{n}^0 = 3(x^2+y^2)$$

$$\oint_E \vec{a}\cdot d\vec{r} = \iint_{D_{xy}} rot\vec{a}\cdot\vec{n}^0 ds = 3\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)dxdy$$

Uvodimo nove koordinate : $x = ar\cos\phi$, $y = br\sin\phi$, Jakobijan je $J = abr$.

$$3ab\iint_{D_{xy}}(a^2 cos^2\phi + b^2 sin^2\phi)r^2 dr \quad d\phi = 3ab\int_0^{2\pi}((a^2 cos^2\phi + b^2 sin^2\phi)\int_0^1 r^3 dr))d\phi$$

$$= \frac{3ab}{4}\int_0^{2\pi}(a^2\cos^2\phi + b^2\sin^2\phi)d\phi .$$

Kako su integrali :

$$\int_0^{2\pi}\sin^2\phi d\phi = (\frac{\phi}{2} - \frac{\sin 2\phi}{4})\Big|_0^{2\pi} = \pi$$

$$\int_0^{2\pi}\cos^2\phi d\phi = (\frac{\phi}{2} + \frac{\sin 2\phi}{4})\Big|_0^{2\pi} = \pi$$

Konačno je : $\oint_E \vec{a}\cdot d\vec{r} = \iint_S (rot\vec{a}\cdot\vec{n}^0)ds = \frac{3ab}{4}(a^2+b^2)\pi$

1.6: Odredi tok vektora $\vec{a} = 2x\vec{i} - y^2\vec{j} + x^3\vec{k}$ kroz zatvorenu plohu koju omeđuju $x^2+y^2=4\,; x^2+y^2=z\,; z=0$ u smjeru vanjske normale

Primjenimo teorem o divergenciji: $\iint_S \vec{a}\cdot\vec{n}^0 dS = \iiint_V div\vec{a}dV$

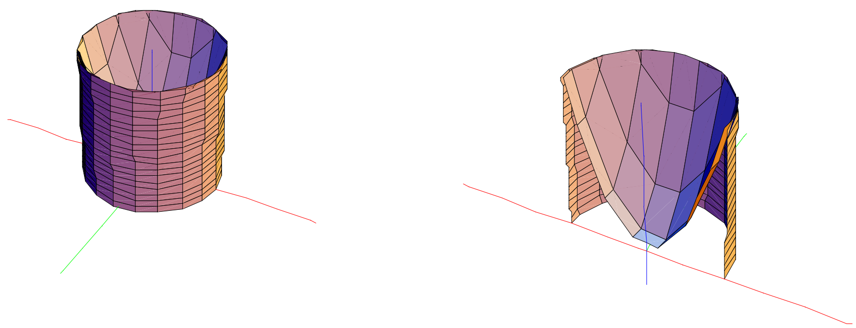
Kako je $div\vec{a} = 2(1+y)$ treba izračunati integral $2\iiint_V(1+y)dzdydx$

Uvodimo polarne koordinate :
$x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$, $z = z$ Jakobijan iznosi $J = r$

Granice : $\phi\Big|_0^{2\pi}$, $r\Big|_0^{2}$, $z\Big|_0^{r^2}$

$$2\iiint_V(1+y)dzdydx = 2\int_0^{2\pi}(\int_0^2(1+r\cos\phi)r(\int_0^{r^2}dz)dr)d\phi$$

$$= 2\int_0^{2\pi}\left(\int_0^2 (r^3 + r^4\cos\phi)dr\right)d\phi = 2\int_0^{2\pi}\left[\frac{r^4}{4}+\frac{r^5}{5}\cos\phi\right]\Bigg|_0^2 d\phi = 2\int_0^{2\pi}\left(4+\frac{32}{5}\cos\phi\right)d\phi = 16\pi$$



slika 1.4 – zadatak 1.6

Na slici 1.4 (desno) prikazan je presjek ravninom $x = 0$ .Zatvorena ploha o kojoj je riječ sastoji se od :

1. dijela (xy) ravnine koji je omeđen kružnicom $x^2 + y^2 = 4$;
2. dijela paraboloida $x^2 + y^2 = z$ unutar valjka $x^2 + y^2 = 4$;
3. dijela valjka iznad (xy) ravnine odozgo omeđenog paraboloidom.

pismeni br.2

2.1: Odrediti posebno rješenje diferencijalne jednadžbe
$(x^2 - 3y^2)dx + 2xydy = 0 \quad , \quad y(2) = 1$

2.2: Odrediti ono rješenje diferencijalne jednadžbe $y''' - 2y'' + y' = 2x + e^x$ koje zadovoljava početni uvjet: $y(0) = y'(0) = y''(0) = 1$.

2.3: Izračunati $\iint\limits_{\Sigma^+} zdxdy$, gdje je $\sum^+$ vanjska strana elipsoida $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

2.4: Izračunaj : a) izravno ; b) pomoću Greenove formule $\oint\limits_C (xy + x + y)dx + (xy + x - y)dy$, gdje je C krivulja $x^2 + y^2 = ax$ negativno orijentirana.

2.5: Izračunaj cirkulaciju vektora $\vec{a} = y\vec{i} - x\vec{j} + (x + y)\vec{k}$, duž krivulje $C : \begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = 1 \end{cases}$; a) direktno; b) pomoću Stokesova poučka.

2.6: Pomoću teorema o divergenciji izračunati tok vektora $\vec{a} = 3x\vec{i} - y\vec{j} - z\vec{k}$
Kroz dio plohe $9 - z = x^2 + y^2$, koji leži u prvom oktantu u smjeru vanjske normale.

RJEŠENJA

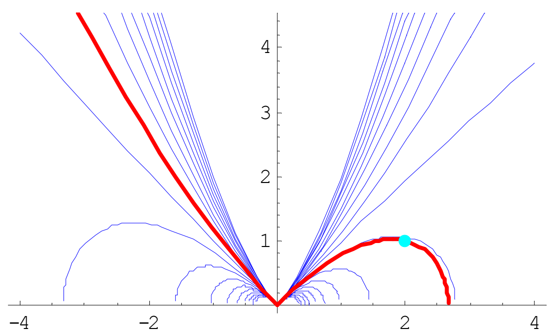
2.1: Odrediti posebno rješenje diferencijalne jednadžbe
$(x^2 - 3y^2)dx + 2xydy = 0$, $y(2) = 1$,
.

Jednadžba je homogena jer se može napisati u obliku $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3\left(\dfrac{y}{x}\right)^2 - 1}{2\left(\dfrac{y}{x}\right)}$

Uobičajena supstitucija $\dfrac{y}{x} = u \to y' = u + x\dfrac{du}{dx}$ vodi do jednadžbe

Sa separiranim varijablama $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{2udu}{u^2 - 1}$ koja ima opće rješenje $y = \sqrt{x^2 + Cx^3}$

Početni uvjet $y(2) = 1 \to C = -\dfrac{3}{8}$ pa je posebno rješenje $y = x\sqrt{1 - \dfrac{3}{8}x}$



slika 2.1 – zadatak 2.1

2.2: Odrediti ono rješenje diferencijalne jednadžbe $y''' - 2y'' + y' = 2x + e^x$ koje zadovoljava početni uvjet: $y(0) = y'(0) = y''(0) = 1$.

Karakteristična jednadžba jednadžbe $y''' - 2y'' + y' = 2x + e^x$ je
$r^3 - 2r + r = 0$, a njezina rješenja su : $r_1 = 0$; $r_{2,3} = 1$. Prema tome opće rješenje je
$y = C_1 \cdot 1 + C_2 e^x + xC_3 e^x$
Partikularno rješenje tražimo u obliku $\eta = x(Ax + B) + x^2 Ce^x$
Deriviranjem i sređivanjem dobivamo

$$\eta' = 2Ax + B + 2xCe^x + x^2 Ce^x$$

$$\eta'' = 2A + 2Ce^x + 4xCe^x + x^2 Ce^x$$

$$\eta''' = 6Ce^x + 6xCe^x + x^2 Ce^x$$

Uvrštavanjem η' , η'' , η''' u nehomogenu jednadžbu dobivamo jednadžbu $-4A + B + 2Ax + 2Ce^x = 2x + e^x$. Uspoređivanjem koeficijenata dobivamo: $A = 1$, $B = 4$, $C = \frac{1}{2}$ te je parikularno rješenje $\eta = x(4 + x) + \frac{1}{2} x^2 e^x$ što onda daje opće rješenje $y = C_1 + C_2 e^x + C_3 x e^x + x^2 + 4x + \frac{1}{2} x^2 e^x$

Početni uvjet vodi do sustava

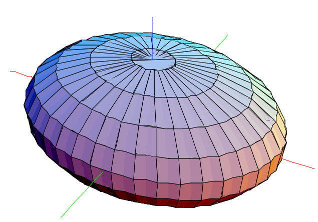
$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ \quad + C_2 + C_3 = -3 \\ \quad + C_2 + 2 = -2 \end{cases}$$

Rješenje sustava je trojka $(C_1, C_2, C_3) = (5, -4, 1)$. Konačno, partikularno rješenje je

$$y = 5 + (x-4)e^x + x^2 + 4x + \frac{1}{2} x^2 e^x$$

2.3: Izračunati $\iint\limits_{\Sigma^+} z\,dx\,dy$, gdje je $\sum^+$ vanjska strana elipsoida $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Iz jednadžbe elipsoida dobivamo $z = \pm c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$ (+ za gornju, a – za donju polovicu elipsoida).



slika 2.2 – zadatak 2.3

Integral po plohi elipsoida bit će

$$I = 2c \iint\limits_{Dxy} \sqrt{1 - (\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2})}\,dx\,dy \text{ gdje je domena } D_{xy} = \left\{ (x, y) \in R^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1 \right\}.$$

Uvodimo poopćene polarne koordinate

$x = ar \cos \phi$, $y = br \sin \phi$, $J = abr$

Stoga je element površine $dxdy = abrdrd\phi$

$$I = 2c\int_0^{2\pi}(\int_0^1 \sqrt{1-r^2}\,abrdr)d\phi = 2abc\int_0^{2\pi}(\int_0^1 \sqrt{1-r^2}\,rdr)d\phi$$

Zamjenom varijabli domena (elipsa) prelazi u jediničnu kružnicu.
Naime vrijedi

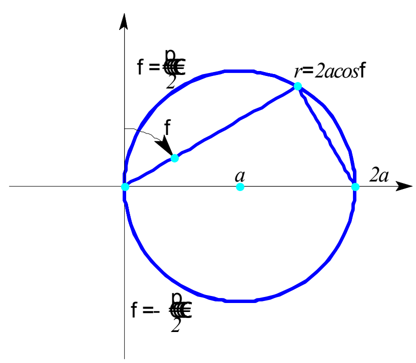
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow r^2(\cos^2\phi + \sin^2\phi) = 1 \rightarrow r^2 = 1 \rightarrow r = 1.$$

Stoga su granice integriranja $r\Big|_0^1$, $\phi\Big|_0^{2\pi}$. Završimo li integriranje dobivamo

$$I = \frac{4}{3}abc\pi .$$

2.4: Izračunati pomoću Greenove formule $\oint_C (xy + x + y)dx + (xy + x - y)dy$,

gdje je C krivulja $x^2 + y^2 = ax$ negativno orijentirana.



slika 2.3 – zadatak 2.4

Primjenimo Greenovu formulu. Kako su

$$P(x,y) = xy + x + y \quad , \quad Q(x,y) = xy + x - y$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = x + 1 \quad , \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = y + 1$$

Treba izračunati $\oint Pdx + Qdy = \iint_{D_{xy}} (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy = \iint_{D_{xy}} (y - x)dxdy$.

Jer je domena krug., uvodimo polarne koordinate

$$x = r\cos\phi \quad , \quad y = r\sin\phi \quad , \quad dxdy = rdrd\phi$$

Granice : $r\Big|_0^{a\cos\phi}$, $\phi\Big|_{\pi/2}^{-\pi/2}$. Uvrstimož li to u integral dobivamo

$$\int_{\pi/2}^{-\pi/2}((\sin\phi - \cos\phi)\int_0^{a\cos\phi} r^2dr)d\phi = \frac{a^3}{3}\int_{\pi/2}^{-\pi/2}(\cos^3\phi\sin\phi - \cos^4\phi)d\phi$$

Kako je $\int\limits_{\pi/2}^{-\pi/2} \cos^3\phi \sin\phi d\phi = 0$ (integral neparne funkcije na simetričnoj domeni) preostaje izračunati

$$-\frac{a^3}{3}\int\limits_{\pi/2}^{-\pi/2} \cos^4\phi \, d\phi = -\frac{a^3}{3}\left[\frac{3}{8}\phi + \frac{1}{4}\sin 2\phi + \frac{1}{32}\sin 4\phi\right]\Big|_{\pi/2}^{-\pi/2} = \frac{a^3\pi}{8}$$

2.5: Izračunati cirkulaciju vektora $\vec{a} = y\vec{i} - x\vec{j} + (x+y)\vec{k}$, duž krivulje $C: \begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = 1 \end{cases}$; pomoću Stokesova poučka.

Prema Stokesovom poučku vrijedi $\oint\limits_C \vec{a}\cdot d\vec{r} = \iint\limits_\Sigma (rot\vec{a}\cdot\vec{n}^0)dS$

Izračunajmo vektor $rot\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & -x & x+y \end{vmatrix} = \vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$

Kako je krivulja kružnica $z = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$, ona razapinje krug i dio paraboloida , pa zadatak možemo riješiti za bilo koju od te dvije plohe. Ovaj put, samo za vježbu, rješit ćemo ga za obje te plohe.

1.varijanta: Izaberimo plohu paraboloida.
Tada je normala

$$\vec{n}^0 = \frac{grad\left[x^2 + y^2 - z\right]}{\left\|grad\left[x^2 + y^2 - z\right]\right\|} = \frac{2x\vec{i} + 2y\vec{j} - \vec{k}}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}$$

$$dS = \frac{dxdy}{|\cos\gamma|} = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}\, dxdy$$

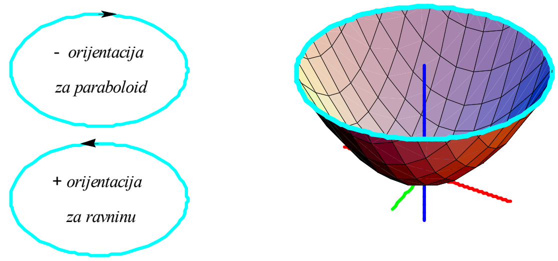
to daje $rot\vec{a}\cdot\vec{n}^0 dS = 2(x - y + 1)dxdy$

$$\oint\limits_C \vec{a}\cdot d\vec{r} = \iint\limits_\Sigma (rot\vec{a}\cdot\vec{n}^0)dS = 2\iint (x - y + 1)dxdy$$

Uvođenjem polarnog koordinatnog sustava dobivamo

$$2\pi\int\limits_{2\pi}^{0}\left[\int\limits_0^1 (r\cos\phi - r\sin\phi + 1)rdr\right]d\phi = 2\int\limits_{2\pi}^{0}\left[(\cos\phi - \sin\phi)\frac{r^3}{3}\Big|_0^1 + \frac{r^2}{2}\Big|_0^1\right]d\phi$$

Konačno $\oint\limits_C \vec{a}\cdot d\vec{r} = \iint\limits_{\Sigma} (rot\vec{a}\cdot\vec{n}^0)dS = -2\pi$.



slika 2.4 - zadatak 2.5

Napomena 1: Kako je uobičajeno, ako se posebno ne istakne, kružnicu smatramo pozitivno orijentiranom . Da bi ta orijentacija bila u skladu s orijentacijom paraboloida uzimamo da se ϕ mijenja od $2\pi \quad do \quad 0$. Paraboloid je orijentiran u odnosu na vanjsku normalu, pa je kružnica negativno orijentirana (po padajućem parametru).

2.varijanta: Ako biramo plohu kruga bit će uz $\vec{n}^0 = \vec{k} \quad i \quad (rot\vec{a}\cdot\vec{n}^0)dS = -2dxdy$

$$\iint\limits_{D_{xy}} rot\vec{a}\cdot\vec{n}^0 dS = -2\iint\limits_{D_{xy}} dxdy = -2\pi$$

Napomena 2: U ovoj je varijanti kružnica pozitivno orijentirana (po rastućem parametru), što je u skladu s orijentacijom ravnine $z = 1$. Dakako, u slučaju suprotne orijentacije , rezultat bi bio suprotan.

2.6: Pomoću teorema o divergenciji izračunati tok vektora $\vec{a} = 3x\vec{i} - y\vec{j} - z\vec{k}$ kroz dio plohe $9 - z = x^2 + y^2$, koji leži u prvom oktantu u smjeru vanjske normale.

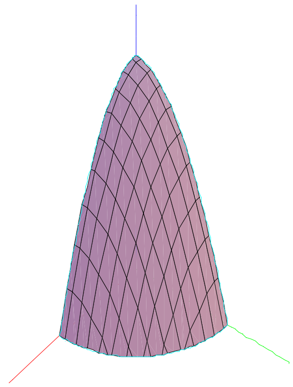
Na slic 2.5 nacrtan je dio paraboloida u prvom oktantu:

U koordinatnoj ravnini $y0z$ imamo parabolu $z = 9 - y^2$

U koordinatnoj ravnini $x0z$ imamo parabolu $z = 9 - x^2$

U koordinatnoj ravnini $x0y$ imamo kružnicu $x^2 + y^2 = 9$

slika 2.5-zadatak 2.6



Kako je divergencija od $\vec{a} = 3x\vec{i} - y\vec{j} - z\vec{k}$, $div\vec{a} = 1$ bit će

$$\iint_{\Sigma} (\vec{a} \cdot \vec{n}^0) dS = \iiint_V div\vec{a} \cdot dV = \iiint_V dxdydz .$$

Uvodimo cilindrične koordinate

$x = r \cos \phi$, $y = r \sin \phi$, $z = z$, $dxdydz = rdrd\phi dz$

Granice : $r\Big|_0^3$, $\phi\Big|_0^{\pi/2}$, $z\Big|_0^{9-r^2}$

$$\iiint_V dzdrd\phi = \int_0^{\pi/2} \left[\int_0^3 \left(\int_0^{9-r^2} dz \right) rdr \right] d\phi = \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^3 9r - r^3) dr \right) d\phi = \frac{81\pi}{8}$$

Napomena :Jasno je da dio paraboloida u prvom oktantu nije zatvorena ploha , pa valja obrazložiti opravdanost primjene teorema o divergenciji. Naime, možemo smatrati da smo ga zatvorili dijelovima koordinatnih ravnina , što ih odsijeca paraboloid. Radi korektnosti valjalo bi oduzeti tokove kroz dijelove koordinatnih ravnina. Međutim , to ne činimo, jer su sva tri jednaki nuli . Imamo:

$$\Pi_{xz} = \iint_{D_{xz}} (\vec{a} \cdot \vec{n}^0) dS = \iint_{D_{xz}} ydxdz = 0 \text{ (jer je } y = 0\text{)}$$

$$\Pi_{yz} = \iint_{D_{yz}} (\vec{a} \cdot \vec{n}^0) dS = -\iint_{D_{xz}} 3xdydz = 0 \text{ (jer je } x = 0\text{)}$$

$$\Pi_{xy} = \iint_{D_{xy}} (\vec{a} \cdot \vec{n}^0) dS = \iint_{D_{xy}} zdxdz = 0 \text{ (jer je } z = 0\text{)}$$

pismeni br.3

3.1: Razviti u Fourierov red funkciju $f(x)=\begin{cases} 0 & za\ -2<x\le 0 \\ \dfrac{x}{2} & za\ \ 0<x<2 \end{cases}$

3.2: Odrediti derivaciju skalarne funkcije $u=\ln\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ u smjeru tangente na krivulju $\vec{r}(t)=(t^2+4t)\vec{i}-\dfrac{t^2}{2}\vec{j}$ u točki koja odgovara parametru $t=-4$.

3.3: Odrediti partikularno rješenje diferencijalne jednadžbe $y'''-6y''+12y'-8y=1+2e^{2x}$ koje zadovoljava početni uvjet $y(0)=\dfrac{7}{8}$, $y'(0)=-1$, $y''(0)=-2$.

3.4: Pokazati da je singularno rješenje jednadžbe $y=xy'+\dfrac{ay'}{\sqrt{1+y'^2}}$ krivulja $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=\sqrt[3]{a^2}$ (astroida).

3.5: Izračunati $\oint\limits_C (x+y)ds$, gdje je C desna latica lemniskate $r^2=16\cos 2\phi$.

3.6: Odrediti tok vektora $\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ kroz : a) bazu , b) plašt stošca $z=1-\sqrt{x^2+y^2}$; $z=0$

RJEŠENJA

3.1: Razviti u Fourierov red funkciju $f(x) = \begin{cases} 0 & za\ -2 < x \le 0 \\ \dfrac{x}{2} & za\ \ 0 < x < 2 \end{cases}$

Period funkcije $2l = 4 \to l = 2$. Koeficijente u redu

$f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\dfrac{n\pi x}{l} + b_n \sin\dfrac{n\pi x}{l})$ računamo prema formulama

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx \ \ , \ n = 0,1,2,3,......$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx \ \ , \ n = 1,2,3,.....$$

U našem slučaju imamo

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{x}{2}dx = \frac{1}{4}\frac{x^2}{2}\Big|_0^2 = \frac{1}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{2}\int \frac{x}{2}\cos\frac{n\pi x}{2}dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x}{2}\cdot\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2 - \int_0^2 \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\frac{dx}{2}\right]$$

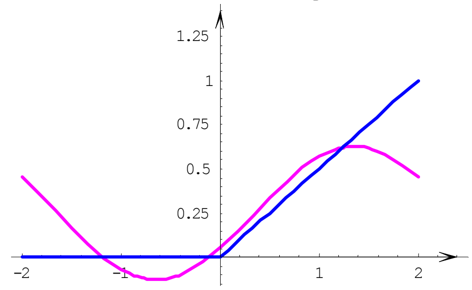
$$= \begin{cases} 0 & za\ \ parno\ \ n \\ \dfrac{-2}{n^2\pi^2} & za\ \ neparno\ \ n \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{2}\int \frac{x}{2}\sin\frac{n\pi x}{2}dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{x}{2}\cdot\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2 + \int_0^2 \frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\frac{dx}{2}\right]$$

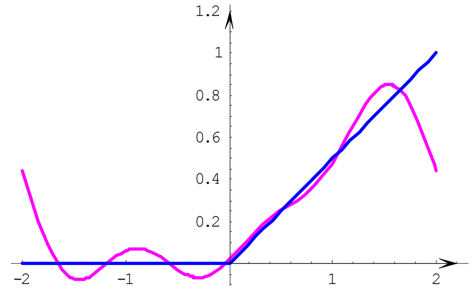
$$= \begin{cases} -\dfrac{1}{n\pi} & za\ \ parno\ \ n \\ \dfrac{1}{n\pi} & za\ \ neparno\ \ n \end{cases}$$

Konačno je $f(x) = \dfrac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{-2}{\pi^2(2n-1)^2}\cos\dfrac{n\pi x}{2} + \dfrac{(-1)^{n+1}}{n\pi}\sin\dfrac{n\pi x}{2}$.

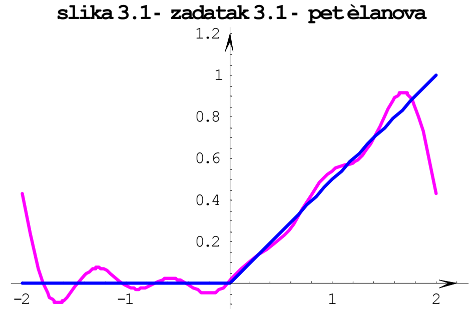
slika 3.1- zadatak 3.1- jedan èlan



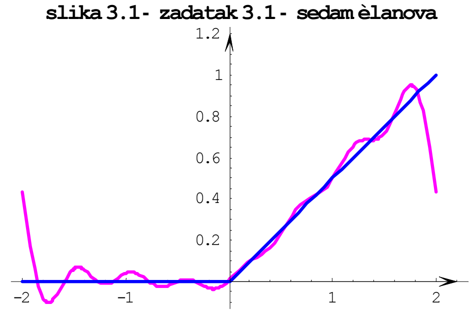
slika 3.1- zadatak 3.1- tri èlana



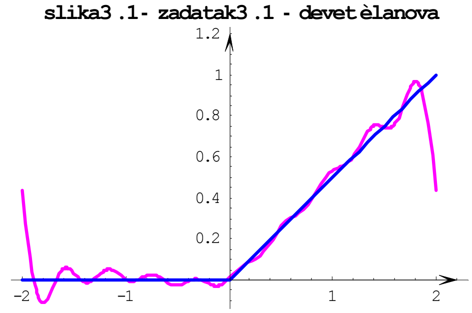
slika 3.1- zadatak 3.1- pet èlanova



slika 3.1- zadatak 3.1- sedam èlanova



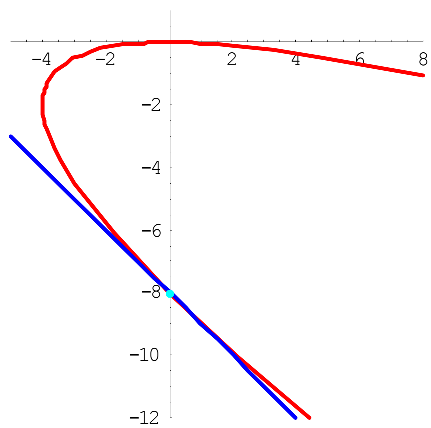
slika3 .1- zadatak3 .1 - devet èlanova



3.2: Odrediti derivaciju skalarne funkcije $u = \ln\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ u smjeru tangente na krivulju $\vec{r}(t) = (t^2+4t)\vec{i} - \frac{t^2}{2}\vec{j}$ u točki koja odgovara parametru $t = -4$.

Krivulja je parabola parametarske jednadžbe $x = t^2 + 4t$, $y = -\frac{t^2}{2}$

slika 3.2-zadatak 3.2



Točka koja odgovara parametru $t = -4$ je $M(0,-8)$.

Jednadžba tangente u točki M: $\frac{x}{\dot{x}(-4)} = \frac{y+8}{\dot{y}(-4)} \Leftrightarrow \frac{x}{-4} = \frac{y+8}{4}$, pa je vektor tangente $\vec{t} = -4\vec{i} + 4\vec{j} \to \vec{t}^{\,0} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$.

Nadalje,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sqrt{x^2+y^2}\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{x^2+y^2}(x^2+y^2)} = \frac{-x}{x^2+y^2}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = \sqrt{x^2+y^2}\cdot\frac{-2y}{2\sqrt{x^2+y^2}(x^2+y^2)} = \frac{-y}{x^2+y^2}.$$

Kako je: $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M = 0$ i $\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M = \frac{1}{8}$, a $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ i $\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$,

imamo konačno $\frac{du}{dt} = \left.gradu\right|_M\cdot\vec{t}^{\,0} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M\cdot\cos\alpha + \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M\cdot\cos\beta = \frac{1}{8\sqrt{2}}$.

3.3: Odrediti partikularno rješenje diferencijalne jednadžbe $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 1 + 2e^{2x}$ koje zadovoljava početni uvjet $y(0) = \frac{7}{8}$, $y'(0) = -1$, $y''(0) = -2$.

Karakteristična jednadžba jednadžbe $r^3 - 6r^2 + 12r - 8 = 0$
ima trostruki korijen $r_{1,2,3} = 2$ pa je opće rješenje homogene jednadžbe
$y = (C_1 + xC_2 + x^2C_3)e^{2x}$

Partikularno rješenje nehomogene jednadžbe tražimo u obliku
$\eta = A + x^3Be^{2x}$ $(x^3 - zbog\ \ trostrukosti\ \ korjena\ r = 2)$

Derivacije od $\eta = A + Bx^3e^{2x}$ su redom

$$\eta' = 3Bx^2e^{2x} + 2Bx^3e^{2x}$$
$$\eta'' = 6Bxe^{2x} + 12Bx^2e^{2x} + 4Bx^3e^{2x}$$
$$\eta''' = 6Be^{2x} + 36Bxe^{2x} + 36Bx^2e^{2x} + 8Bx^3e^{2x}$$

Uvrštavanjem ovih vrijednosti u nehomogenu jednadžbu dobivamo $A = -\frac{1}{8}$ i $B = \frac{1}{3}$ pa je partikularno rješenje $\eta = -\frac{1}{8} + \frac{1}{3}x^3e^{2x}$, a opće rješenje nehomogene jednadžbe
$y = (C_1 + xC_2 + x^2C_3)e^{2x} - \frac{1}{8} + \frac{1}{3}x^3e^{2x}$.

Početni uvjet vodi do sustava $\begin{cases} C_1 & & & = & 1 \\ 2C1 & +C_2 & & = & -1 \\ 4C_1 & +4C_2 & -2C_3 & = & -2 \end{cases}$,

kojemu je rješenje trojka $(C_1, C_2, C_3) = (1,-3,-3)$.

Konačno rješenje : $y = (1 - 3x - 3x^2)e^{2x} - \frac{1}{8} + \frac{1}{3}x^3e^{2x}$

3.4: Pokazati da je singularno rješenje jednadžbe $y = xy' + \frac{ay'}{\sqrt{1 + y'^2}}$ krivulja $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2}$.

Riješimo jednadžbu: $y = xy' + \frac{ay'}{\sqrt{1 + y'^2}}$.

Ako u jednadžbu uvrstimo $p = y'$ dobivamo $y = px + \frac{ap}{\sqrt{1 + p^2}}$

Deriviramo li po x dobivenu jednadžbu, nakon sređivanja dobivamo

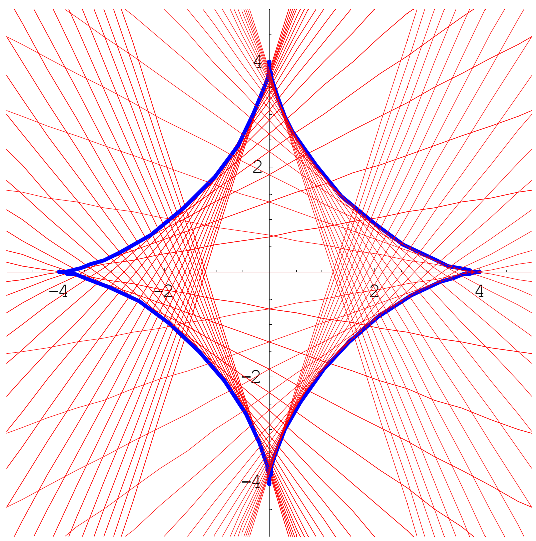
$$\frac{dp}{dx}\left(x+\frac{a}{(1+p^2)\sqrt{1+p^2}}\right)=0 .$$

Ako je $\frac{dp}{dx}=0 \to p=C \to y=Cx+\frac{aC}{\sqrt{1+C^2}}$ i to je opće rješenje koje predstavlja familiju pravaca.

Ako je $(x+\frac{a}{(1+p^2)\sqrt{1+p^2}})=0$, odavde je $x = \frac{-a}{\sqrt{(1+p^2)^3}}$ što zajedno s

$y=px+\frac{ap}{\sqrt{1+p^2}}$ prestavlja parametarske jednadžbe anvelope (omataljke) familije pravaca koja predstavlja opće rješenje.

slika 3.3-zadatak 3.4



Pokažimo da se radi o astroidi.

Imamo $\begin{cases} x = \dfrac{-a}{\sqrt{(1+p^2)^3}} \\ y = px + \dfrac{ap}{\sqrt{1+p^2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{x}{a} = \dfrac{1}{\sqrt{(1+p^2)^3}} \\ \dfrac{y}{a} = \dfrac{p^3}{\sqrt{(1+p^2)^3}} \end{cases}$

Posljednje jednadžbe možemo napisati u obliku

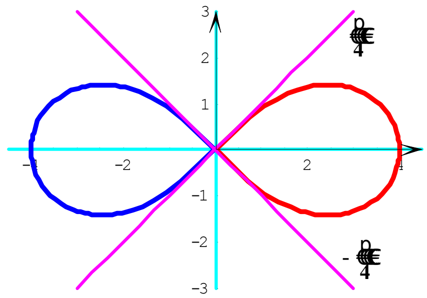
$$\begin{cases} \left[\dfrac{x}{a}\right]^2 = \left[\dfrac{1}{1+p^2}\right]^3 \\ \left[\dfrac{y}{a}\right]^2 = \left[\dfrac{p^2}{1+p^2}\right]^3 \end{cases}$$

Potenciranjem sa 1/3 te zbrajanjem dobivamo : $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$

Uvedemo li novi parametar t $p=tgt$ gornje jednadžbe možemo pisati u obliku
$\begin{cases} x=a\cos^3 t \\ y=a\sin^3 t \end{cases}$, a to su parametarske jednadžbe astroide u dosad prepoznatljivom obliku.

3.5: Izračunati $\oint\limits_C (x+y)ds$, gdje je C desna latica lemniskate $r^2=16\cos 2\phi$.

$$\oint\limits_C (x+y)ds \ , \ \ r^2=a^2\cos 2\phi$$



slika 3.4 – zadatak 3.5

Parametriziramo jednadžbu lemniskate. Parametar ϕ (za desnu laticu) se mijenja u intervalu $\left[-\dfrac{\pi}{4}\ ,\ \dfrac{\pi}{4}\right]$.

$$\begin{aligned} x&=a\sqrt{\cos 2\phi}\cos\phi \\ y&=a\sqrt{\cos 2\phi}\sin\phi \end{aligned}.$$

Izračunamo li derivacije po t , dobivamo :

$$:\ \begin{aligned} \dot{x}&=\frac{-a\sin 2\phi\cos\phi}{\sqrt{\cos 2\phi}}-a\sqrt{\cos 2\phi}\sin\phi \\ \dot{y}&=\frac{-a\sin 2\phi\sin\phi}{\sqrt{\cos 2\phi}}+a\sqrt{\cos 2\phi}\cos\phi \end{aligned}$$

Kvadriranjem i zbrajanjem dobivamo

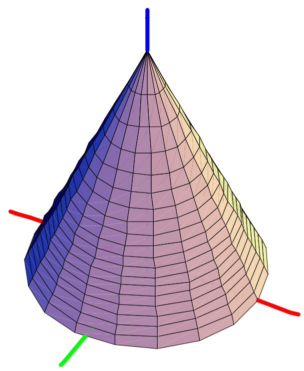
$$\dot{x}^2+\dot{y}^2=\frac{a^2}{\cos 2\phi}\rightarrow ds=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,d\phi=\frac{a}{\sqrt{\cos 2\phi}}\,d\phi \text{ i na kraju}$$

$$\oint\limits_C (x+y)ds=\oint\limits_C a^2(\sin\phi+\cos\phi)d\phi$$

$$=a^2\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4}(\sin\phi+\cos\phi)d\phi=16\sqrt{2}$$

3.6: Odrediti tok vektora $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ kroz : a) bazu , b) plašt stošca
$z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$; $z \geq 0$

-zadatak 3.6



Označimo ukupni tok vektora $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ sa $T = T_1 + T_2$, gdje su
$T_1 - tok\ \ kroz\ \ bazu$, $T_2 - tok\ \ kroz\ \ plast$.

a) $T_1 - tok\ \ kroz\ \ bazu;$ Ovdje je z = 0 , a kako je $\vec{a} \cdot \vec{n}^0 = \vec{a} \cdot (-\vec{k}) = -z = 0$, to je tok kroz bazu jednak nula

b) $T_2 - tok\ \ kroz\ \ plast$;

$$\vec{n}^0 = \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + (1-z)\vec{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + (1-z)^2}} \quad , \quad dS = \frac{dx\,dy}{|\cos\gamma|} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + (1-z)^2}}{1-z}\,dx\,dy$$

$$T_2 = \iint_{\Sigma} \left(\vec{r} \cdot \vec{n}^0\right) dS = \iint_{D_{xy}} \left(\frac{x^2 + y^2}{1-z} + z \right) dxdy$$

$$= \iint_{D_{xy}} \left[\frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 1 - \sqrt{x^2 + y^2} \right] dxdy = \iint_{D_{xy}} dxdy = \pi$$

jer je domena krug $D_{xy} = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.
Dakle, ukupni tok jednak je toku kroz plašt .

Drugi način.
Kako je divergencija vektora $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ jednaka $div\vec{a} = 3$
Prema teoremu o divergenciji sljedi $\iint_{\Sigma} \left(\vec{a} \cdot \vec{n}^0\right) dS = \iiint_V div\vec{a}\,dV = 3\iiint dV = \pi$