pismeni br.4

4.1: Razviti u Fourierov red funkciju perioda p = 4, danu formulom

$$f(x)=\begin{cases} 1-x^2 & za \quad 0<x\le 1 \\ \dfrac{x-1}{2} & za \quad 1<x\le 4 \end{cases}$$

4.2: Izračunati $\int_K yds$, gdje je K luk parabole $y^2 = 2px$ od ishodišta to točke $M(x_0, y_0)$.

4.3: Izračunati koordinate težista homogenog luka cikloide
$x = a(t-\sin t)$, $y = a(1-\cos t)$;$0 \le t \le 2\pi$.

4.4: Izračunati $I = \oint_K e^x\left[(1 - \cos y)dx - (y - \sin y)dy\right]$, gdje je K rub područja $0 \le x \le \pi$, $0 \le y \le \sin x$ pozitivno orijentiran.

4.5: Odrediti funkciju $f(x)$ tako da vektorsko polje
$\vec{a} = (1+x^2)\cdot f(x)\vec{i} + 2xy\cdot f(x)\vec{j} - 3z\vec{k}$ bude solenoidalno

4.6: Odrediti analitičku funkciju $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ kojoj je realni dio
$u(x,y) = x^2 - y^2 + 5x + y - \dfrac{y}{x^2+y^2}$.

RJEŠENJA

4.1: Razviti u Fourierov red funkciju perioda p = 4, danu formulom

$$f(x)=\begin{cases}1-x^2 & za \quad 0<x\le 1\\ \dfrac{x-1}{2} & za \quad 1<x\le 4\end{cases}$$

Želimo funkciju zapisati u obliku $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l})$

Koeficijente određujemo parcijalnom integracijom (kod nas je $l=4$)

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{2n\pi}{l}xdx,\ n=0,1,2...;\ b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{2n\pi}{l}xdx\ ,n=1,2,3...$$

$$a_0=\frac{1}{2}\left[\int_0^1(1-x^2)dx+\int_1^4\frac{x-1}{2}dx\right]=\frac{35}{24}$$

$$a_n=\frac{1}{2}\left[\int_0^1(1-x^2)\cos\frac{n\pi}{2}xdx+\int_1^4\frac{x-1}{2}\cos\frac{n\pi}{2}xdx\right]$$

$$b_n=\frac{1}{2}\left[\int_0^1(1-x^2)\sin\frac{n\pi}{2}xdx+\int_1^4\frac{x-1}{2}\sin\frac{n\pi}{2}xdx\right]$$

Nakon parcijalnih integracija dobiva se :

$$a_n=\frac{1}{n^2\pi^2}\left[-5\cos\frac{n\pi}{2}+1+\frac{8}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\right]$$

$$b_n=\frac{1}{2n\pi}\left[-1-\frac{10}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{16}{n^2\pi^2}(1-\cos\frac{n\pi}{2})\right]$$

4.2: Izračunati $\int_K yds$, gdje je K luk parabole $y^2=2px$ od ishodišta to točke $M(x_0,y_0)$.

$$\int_K yds\,,\ y^2=2px\rightarrow y=\sqrt{2px}\rightarrow y'=\frac{p}{\sqrt{2px}}\rightarrow y'=\sqrt{\frac{p}{2x}}$$

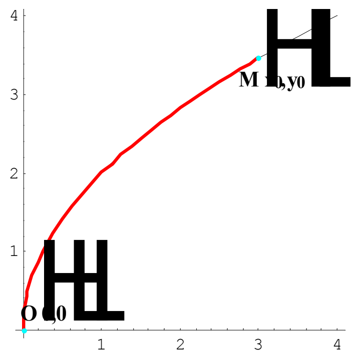
$$ds=\sqrt{1+y'^2}dx=\sqrt{1+\frac{p}{2x}}dx\rightarrow yds=\sqrt{2px}\cdot\sqrt{1+\frac{p}{2x}}dx=\sqrt{2px+p^2}dx$$

Izračunajmo integral $\int_K yds=\int_0^{x_0}\sqrt{2px+p^2}dx=\frac{1}{p}\int_0^{x_0}\sqrt{2px+p^2}pdx$

Uvedimo supstituciju $2px+p^2=t^2\rightarrow pdx=tdt,\ \sqrt{2px+p^2}pdx=t^2dt$

Promijenimo granice $x = 0 \rightarrow t = p$, $x = x_0 \rightarrow t = \sqrt{2px_0 + p^2}$.

Konačno je $\int\limits_K yds = \frac{1}{p} \int\limits_p^{\sqrt{2px_0+p^2}} t^2 dt = \frac{1}{3p}\left[\left(t^3\right) \Big|_p^{\sqrt{2px_0+p^2}} \right] = \frac{1}{3p}\left[\left(2px_0 + p^2\right)^{3/2} - p^3 \right]$



slika 4.1 – zadatak 4.2

4.3: Izračunati koordinate težišta homogenog luka cikloide
$x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$.

Koordinate težišta računamo po formulama : $x = \dfrac{\int\limits_0^{2\pi} xds}{\int\limits_0^{2\pi} ds}$, $y = \dfrac{\int\limits_0^{2\pi} yds}{\int\limits_0^{2\pi} ds}$, pa moramo izračunati

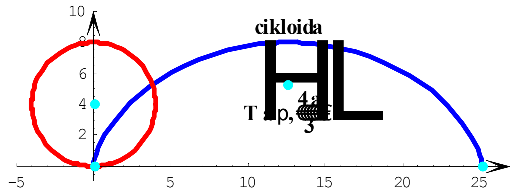
$\int\limits_0^{2\pi} ds$, $\int\limits_0^{2\pi} xds$, $\int\limits_0^{2\pi} yds$. Odredimo li $ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt = 2a \sin\frac{t}{2} dt$ bit će redom:

$$\int\limits_0^{2\pi} ds = 2a \int\limits_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2} dt = -4a\left[\cos\frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} \right] = 8a$$

$$\int\limits_0^{2\pi} xds = \int\limits_0^{2\pi} a(t - \sin t) 2a \sin\frac{t}{2} dt = 2a^2 \int\limits_0^{2\pi} (t \sin\frac{t}{2} - \sin t \sin\frac{t}{2}) dt = 8a^2\pi$$

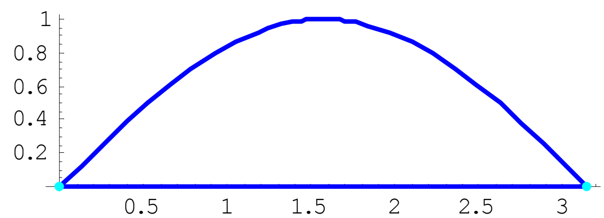
$$\int\limits_0^{2\pi} yds = \int\limits_0^{2\pi} a(1 - \cos t) 2a \sin\frac{t}{2} dt = 2a^2 \int\limits_0^{2\pi} (\sin\frac{t}{2} - \cos t \sin\frac{t}{2} dt = \frac{32a^2}{3}$$

Prema tome težište ima koordinate $T = (a\pi, \frac{4a}{3})$.



slika 4.2 – zadatak 4.3

4.4: Izračunati $I = \oint\limits_K e^x[(1-\cos y)dx - (y-\sin y)dy]$, gdje je K rub područja $0 \le x \le \pi$, $0 \le y \le \sin x$ pozitivno orijentiran.



slika 4.3 – zadatak 4.4

$$I = \oint e^x[(1-\cos y)dx - (y-\sin y)dy]$$

Integral riješimo pomoću Greenove formule

$$\int\limits_K Pdx + Qdy = \iint\limits_S \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = e^x(\sin y - y - \sin y) = -e^x y$$

$$\int\limits_K Pdx + Qdy = \iint\limits_S \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy = -\iint\limits_S e^x ydxdy =$$

$$= -\int\limits_\pi^0 e^x \int\limits_0^{\sin x} ydy = \frac{1}{2}\int\limits_0^\pi e^x \sin^2 xdx = \frac{1}{5}(e^\pi - 1)$$

4.5: Odrediti $f(x)$ tako da vektorsko polje $\vec{a} = (1+x^2)\cdot f(x)\vec{i} + 2xy\cdot f(x)\vec{j} - 3z\vec{k}$ bude solenoidalno.

Da bi polje bilo solenoidalno treba biti

$$div\vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0$$

Drugim rječima funkcija $f(x)$ treba zadovoljavati jednadžbu:

$2xf(x) + (1 + x^2)f'(x) + 2xf(x) - 3 = 0$

ili

$$f'(x) + \frac{4x}{1+x^2} f(x) = \frac{3}{1+x^2}$$

Tražena funkcija je rješenje gornje linearne jednadžbe za funkciju f(x)

Opće rješenje homogene jednadžbe je $f(x) = \dfrac{C}{(1+x^2)^2}$

Potražimo u tom obliku i rješenje nehomogene jednadžbe.

Neka je $f(x) = \dfrac{C(x)}{\left(1+x^2\right)^2}$. Uvrštavanjem u jednadžbu dobivamo

$C'(x) = 3(1+x^2) \rightarrow C(x) = x^3 + 3x + D$

To daje konačno rješenje $f(x) = \dfrac{x^3+3x+D}{(1+x^2)^2}$.

4.6: Odrediti analitičku funkciju $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ kojoj je realni dio

$$u(x,y) = x^2 - y^2 + 5x + y - \frac{y}{x^2+y^2}.$$

Za rješenje koristimo Cauchy-Riemannove jednadžbe: $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$ & $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$

Dobivamo

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 2x + 5 + \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \rightarrow v = \int \left[2x + 5 + \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \right] dy$$

$$v = 2xy + 5y - \frac{x}{x^2+y^2} + \phi(x) \rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = 2y + \frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} + \phi'(x)$$

s druge strane je

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y + 1 - \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 2y - 1 + \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Da bismo odredili funkciju $\phi(x)$, izjednačimo dvije jednakosti za $\dfrac{\partial v}{\partial x}$.

$$2y + \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} + \phi'(x) = 2y - 1 + \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \rightarrow \phi'(x) = -1 \rightarrow \phi(x) = -x + C$$

Konačno rješenje je :

$$f(z) = x^2 - y^2 + 5x + y - \frac{y}{x^2+y^2} + i\,(2xy + 5y - \frac{x}{x^2+y^2} - x + C)$$

.

pismeni br.5

5.1: Odrediti derivaciju skalarnog polja $u(x,y)=2xy+y^2$ u točki $(\sqrt{2},1)$ elipse $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$ u smjeru vanjske normale u toj točki.

5.2: Izračunati cirkulaciju vektora $\vec{a}=zy^2\vec{i}+xz^2\vec{j}+yx^2\vec{k}$ duž krivulje $C...\begin{cases} x &= y^2+z^2 \\ x &= 9 \end{cases}$.

5.3: Pokazati da je polje $\vec{a}=\dfrac{yz\vec{i}+zx\vec{j}+xy\vec{k}}{1+x^2y^2z^2}$ polje potencijala i odrediti potencijal.

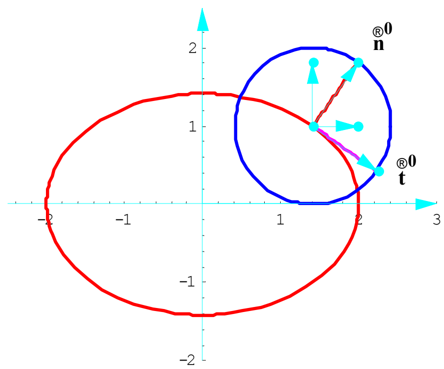
5.4: Riješiti diferencijalnu jednadžbu $xy'-y=(x+y)\ln\frac{x+y}{x}$.

5.5: Odrediti ortogonalne trajektorije familije $x^2+y^2=2ay$.

5.6: Odrediti partikularno rješenje diferencijalne jednadžbe $y''+y=-\sin 2x$, koje zadovoljava početni uvjet $y(\pi)=y'(\pi)=1$.

RJEŠENJA

5.1: Odrediti derivaciju skalarnog polja $u(x,y) = 2xy + y^2$ u točki $(\sqrt{2},1)$ elipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ u smjeru vanjske normale u toj točki.



slika 5.1 – zadatak 5.1

Potrebno je izračunati $u_x\Big|_T \cdot \cos\alpha + u_y\Big|_T \cdot \cos\beta$,

gdje su $u_x\Big|_T, u_y\Big|_T$ parcijalne derivacije od u u točki T, a $\cos\alpha$ i $\cos\beta$ kosinusi smjera jediničnog vektora normale.

Tangenta u točki T ima jednadžbu $\frac{x-\sqrt{2}}{\dot{x}(T)} = \frac{y-1}{\dot{y}(T)}$ pa je vektor tangente

$$\vec{t} = \dot{x}(T)\vec{i} + \dot{y}(T)\vec{j} \rightarrow \vec{t}^{\,0} = \frac{\dot{x}(T)\vec{i} + \dot{y}(T)\vec{j}}{\sqrt{\dot{x}^2(T) + \dot{y}^2(T)}} =$$

$$= \frac{\dot{x}(T)}{\sqrt{\dot{x}^2(T) + \dot{y}^2(T)}}\vec{i} + \frac{\dot{y}(T)}{\sqrt{\dot{x}^2(T) + \dot{y}^2(T)}}\vec{j}$$

Kod nas je

$$x = 2\cos t\ ,\ y = \sqrt{2}\sin t \ \rightarrow \dot{x} = -2\sin t\ ,\ \dot{y} = \sqrt{2}\cos t$$

$$x(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}\ , y(\frac{\pi}{4}) = 1 \quad \rightarrow \dot{x}(\frac{\pi}{4}) = -\sqrt{2}\ , \dot{y}(\frac{\pi}{4}) = 1$$

Vanjska normala i njezin jedinični vektor je

$$\vec{n} = 1\,\vec{i} + \sqrt{2}\vec{j} \rightarrow \vec{n}^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}\,\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\,\vec{j}$$

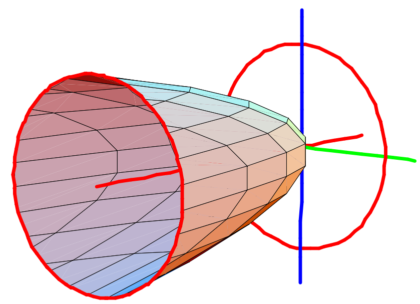
kako su $u_x\Big|_T = 2, u_y\Big|_T = 2\sqrt{2} + 2$, konačno je

$$u_x\Big|_T \cdot \cos\alpha + u_y\Big|_T \cdot \cos\beta = \frac{2\sqrt{3}}{3}(\sqrt{2} + 3).$$

5.2: Izračunati cirkulaciju vektora $\vec{a} = zy^2\vec{i} + xz^2\vec{j} + yx^2\vec{k}$ duž krivulje

$$C\ldots\begin{cases} x &= y^2 + z^2 \\ x &= 9 \end{cases}$$

Krivulja je kružnica paralelna s yz ravninom: $y^2 + z^2 = 9, x = 9$



slika 5.2 – zadatak 5.2

Računamo $\oint\limits_C \vec{a}d\vec{r} = \oint\limits_C zy^2dx + xz^2dy + yx^2dz$

Jednadžba kružnice u parametarskom obliku

$y = 3\cos t,\ z = 3\sin t \rightarrow dy = -3\sin t dt,\ dz = 3\cos t dt,\ dx = 0$

$$\oint\limits_C \vec{a}d\vec{r} = \oint\limits_C zy^2dx + xz^2dy + yx^2dz = \int_0^{2\pi} (-243\sin^3 t + 729\cos^2 t)dt$$

$$= -243(-\cos t + \frac{1}{3}\cos^3 t)\Big|_0^{2\pi} + 729(\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4})\Big|_0^{2\pi} = 729\pi$$

Drugi način:

Prema Stokesovom poučku je: $\oint\limits_C \vec{a}d\vec{r} = \iint\limits_{D_{yz}} rot\vec{a}\cdot\vec{n}^0 dS$

$$rot\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ zy^2 & xz^2 & yx^2 \end{vmatrix} = (x^2 - 2zx)\vec{i} + (y^2 - 2xy)\vec{j} + (z^2 - 2yz)\vec{k},\ \vec{n}^0 = \vec{i}$$

$$\oint\limits_C \vec{a}d\vec{r} = \iint\limits_{D_{yz}} rot\vec{a}\cdot\vec{n}^0 dS = \iint\limits_{D_{yz}} (x^2 - 2zx)dydz = \int_0^{2\pi}\left[\int_0^3 (81r - 18r^2\sin t)dr\right]dt = 729\pi$$

5.3: Pokazati da je polje $\vec{a} = \dfrac{yz\vec{i} + zx\vec{j} + xy\vec{k}}{1 + x^2y^2z^2}$ polje potencijala i odrediti potencijal.

Polje je potencijalno ako je $rot\vec{a} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z} \& \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \& \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$.

Lako se pokaže da je tome tako.
Odredimo funkciju $u(x, y, z)$ za koju je $gradu = \vec{a}$ tj. za koju vrijedi
$\frac{\partial u}{\partial x} = P \; \& \; \frac{\partial u}{\partial y} = Q \; \& \; \frac{\partial u}{\partial z} = R$. Bit će $u = \int \frac{yz}{1 + x^2y^2z^2} dx + f(y, z)$, gdje je $f(y, z)$ – konstanta integracije. Dobivamo

$u = \int \frac{d(xyz)}{1 + (xyz)^2} = actg(xyz) + f(y, z)$. Nadalje je

$$\frac{\partial u}{\partial y} = Q = \frac{zx}{1 + x^2y^2z^2} = \frac{zx}{1 + x^2y^2z^2} + f_y'(y, z) \to f_y'(y, z) = 0 \to f(y, z) = C$$

Prema tome tražena funkcija je $u = u(x, y, z) = arctg(xyz) + C$.

5.4: Riješiti diferencijalnu jednadžbu $xy' - y = (x + y)\ln\frac{x + y}{x}$.

Jednadžbu možemo zapisati u obliku $y' = \frac{y}{x} + (1 + \frac{y}{x})\ln(1 + \frac{y}{x})$

Radi se o homogenoj jednadžbi. Supstitucija $u = \frac{y}{x} \to y' = u + x\frac{du}{dx}$

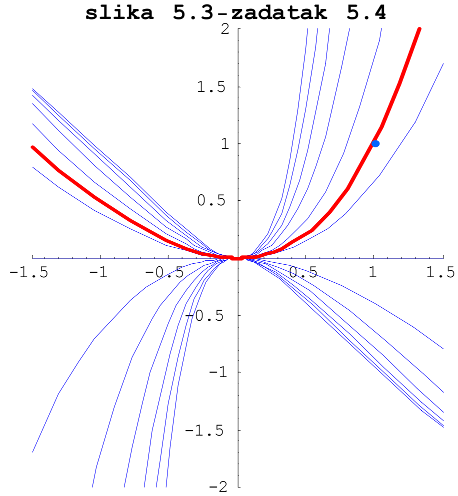
To nam daje jednadžbu $u + x\frac{du}{dx} = u + (1 + u)ln(1 + u)$.

Nakon separacije varijabli

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{(1 + u)ln(1 + u)} \to ln\,Cx = ln(ln(1 + u)) \to y = x(e^{Cx} - 1)$$

Konačno rješenje $y = x(e^{Cx} - 1)$.

slika 5.3-zadatak 5.4



5.5: Odredi ortogonalne trajektorije familije $x^2 + y^2 = 2ay$.

Diferencijalna jednadžba familije $x^2 + y^2 = 2ay$ dobije se eliminacijom parametra a iz jednadžbe i njezine derivacije.To vodi do jednadžbe $y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$

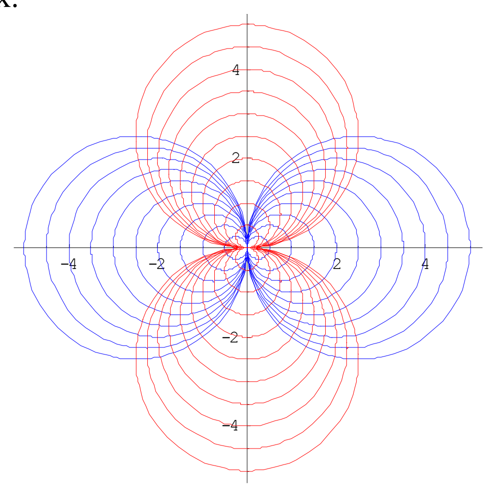
Zamijenimo li u toj jednadžbi y' sa $-\frac{1}{y'}$ dobit ćemo jednadžbu ortogonalnih trajektorija,

tj. $y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy} \to y' = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1}{2\left(\frac{y}{x}\right)}$.

Dobivena jednadžba je homogena .Uobičajena supstitucija daje jednadžbu

$$u + x\frac{du}{dx} = \frac{u^2 - 1}{2u} \to -\frac{dx}{x} = \frac{2udu}{1+u^2} \to \ln\frac{C}{x} = \ln(1+u^2) \to \frac{C}{x} = 1 + u^2$$

vratimo se na supstituciju $u = \frac{y}{x}$ dobivamo konačno rješenje $x^2 + y^2 = Cx$. A to je familija kružnica s centrom na osi x.



slika 5.4 – zadatak 5.5

5.6: Odredi partikularno rješenje diferencijalne jednadžbe $y'' + y = -\sin 2x$, koje zadovoljava početni uvjet $y(\pi) = y'(\pi) = 1$.

Karakteristična jednadžba $r^2 + 1 = 0$ jednadžbe ima konjugirano kompleksne korjene $r_{1,2} = \pm i$.

Prema tome opće rješenje homogene jednadžbe je $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$.

Da bismo odredili opće rješenje nehomogene jednadžbe, polazeći od pretpostavke da je ono oblika $y = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x$ sagradimo sustav

$$\begin{cases} C_1' \cos x & + & C_2' \sin x & = & 0 \\ -C_1' \sin x & + & C_2' \cos x & = & -\sin 2x \end{cases}$$

Rješenje sustava je $(C_1', C_2') = (\sin 2x \sin x, -\sin 2x \cos x)$
Integriranjem dobivamo

$$C_1(x) = \frac{2}{3}\sin^3 x + D_1 \ , \ C_2(x) = \frac{2}{3}\cos^3 x + D_2$$

Konačno rješenje

$$y = D_1 \cos x + D_2 \sin x + \frac{1}{3}\sin 2x$$

partikularno rješenje dobijemo uvrštavanjem početnog uvjeta. Izlazi :
$D_1 = -1$ & $D_2 = -\frac{1}{3}$. Tako dobivamo konačno rješenje : $y = -\cos x - \frac{1}{3}\sin x + \frac{1}{3}\sin 2x$