pismeni br.6

6.1: Korištenjem Greenove formule izračunati površinu krivulje
$x = \frac{a^2}{c}\cos^3 t$, $y = \frac{b^2}{c}\sin^3 t$, (a, b – poluosi elipse , $c = \sqrt{a^2 - b^2}$)

6.2: Izračunati cirkulaciju vektora $\vec{a} = \sqrt{1 + x^2 + y^2}\,\vec{i} + y(xy + \ln(x + \sqrt{1 + x^2 + y^2})\,\vec{j}$ duž kružnice $x^2 + y^2 = 2x$ pozitivno orijentirane.

6.3: Pokazati da je polje $\vec{a} = (\frac{z}{y^2} - \frac{y}{z^2} - \frac{2yz}{x^3})\vec{i} + (\frac{z}{x^2} - \frac{x}{z^2} - \frac{2xz}{y^3})\vec{j} + (\frac{y}{x^2} + \frac{x}{y^2} + \frac{2xy}{z^3})\vec{k}$ polje potencijala i odrediti potencijal.

6.4: Riješiti diferencijalnu jednadžbu $(x\cos y + \sin 2x)y' = 1$

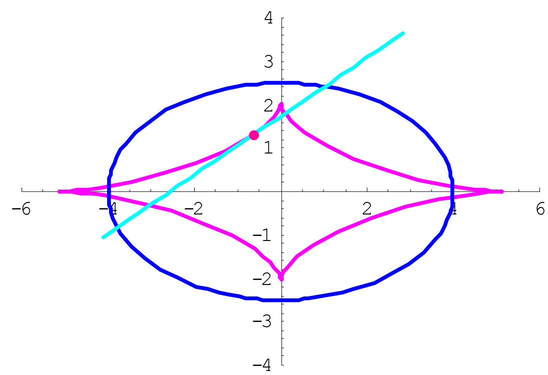
6.5: Odrediti sve krivulje u ravnini koje imaju svojstvo : ako bilo kojom točkom položimo pravce paralelno s koordinatnim osima do presjeka s tim osima, tada je površina dobivenog pravokutnika podijeljena krivuljom u odnosu 1:2.

6.6: Odrediti ono rješenje diferencijalne jednadžbe $y''' - 2y'' + y' = 4(\sin x + \cos x)$, koje zadovoljava početni uvjet: $y(0) = 1;\ y'(0) = 0;\ y''(0) = -1$

RJEŠENJA

6.1: Korištenjem Greenove formule izračunati površinu krivulje
$x=\frac{a^2}{c}\cos^3 t$, $y=\frac{b^2}{c}\sin^3 t$, (a,b – poluosi elipse , $c=\sqrt{a^2-b^2}$)

$P=\frac{1}{2}\oint_E(xdy-ydx)$, krivulja E je slična evoluti elipse.



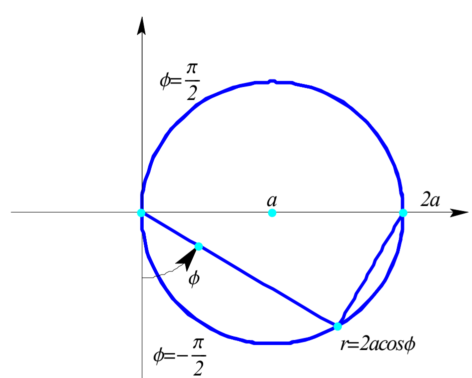
slika 6:1 – zadatak 6.1

Kako je $dx=\frac{-3a^2}{c}cos^2 t\,sin\,tdt$, $dy=\frac{3b^2}{c}sin^2 t\,cos\,tdt$ bit će:

$$P=\frac{1}{2}\oint_E(xdy-ydx)=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{3a^2b^2}{c^2}(\cos^4 t\sin^2 t+\cos^2 t\sin^4 t)dt$$

$$=\frac{3a^2b^2}{2c^2}\int_0^{2\pi}\sin^2 t\cos^2 t\,dt=\frac{3a^2b^2}{2c^2}\left[\frac{t}{8}-\frac{\sin 4t}{32}\right]\Big|_0^{2\pi}=\frac{3a^2b^2\pi}{8c^2}$$

6.2: Izračunati cirkulaciju vektora $\vec{a}=\sqrt{1+x^2+y^2}\,\vec{i}+y(xy+\ln(x+\sqrt{1+x^2+y^2})\,\vec{j}$ duž kružnice $x^2+y^2=2x$ pozitivno orijentirane.



slika 6.2-zadatak 6.2

Primjenimo Greenovu formulu $\oint\limits_K \vec{a}\cdot d\vec{r} = \oint\limits_K P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint\limits_S (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy$, gdje je S površina kruga.

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = y^2 + \frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \ , \ \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = y^2$$

Uvodimo polarne koordinate $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$, $dxdy = rdrd\phi$
Tako dobivamo:

$$\iint\limits_S (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy = \iint\limits_S y^2 dxdy$$

Granice integracije su: $\phi \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}$ i $r \Big|_{0}^{2\cos\phi}$ (Vidi sliku 6.2)

$$\iint\limits_S y^2 dxdy = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[\int\limits_0^{2\cos\phi} r^3 \sin^2\phi dr\right]d\phi = 4\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4\phi \sin^2\phi d\phi =$$

$$= 4\left\{\frac{\sin^3\phi\cos^3\phi}{6}\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} + \frac{3}{6}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin^2\phi\cos^2\phi d\phi\right\} = 2\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin^2\phi\cos^2\phi d\phi = 2\left[\frac{\phi}{8} - \frac{\sin 4\phi}{32}\right]\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$$

6.3: Pokazati da je polje $\vec{a} = (\frac{z}{y^2} - \frac{y}{z^2} - \frac{2yz}{x^3})\vec{i} + (\frac{z}{x^2} - \frac{x}{z^2} - \frac{2xz}{y^3})\vec{j} + (\frac{y}{x^2} + \frac{x}{y^2} + \frac{2xy}{z^3})\vec{k}$ polje potencijala i odrediti potencijal.

Ovdje su:

$$P = \frac{z}{y^2} - \frac{y}{z^2} - \frac{2yz}{x^3} \ , \ Q = \frac{z}{x^2} - \frac{x}{z^2} - \frac{2xz}{y^3} \ , \ R = \frac{y}{x^2} + \frac{x}{y^2} + \frac{2xy}{z^3}$$

Treba provjeriti da vrijedi: $\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}$ & $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$ & $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$
Kako je to ispunjeno, treba odrediti funkciju $u = u(x,y,z)$ tako da bude
$\frac{\partial u}{\partial x} = P$ & $\frac{\partial u}{\partial y} = Q$ & $\frac{\partial u}{\partial z} = R$
Integriranjem bilo koje od gornje tri jednadžbe dobiva se:

$$u = u(x,y,z) = \frac{z}{y^2} \quad x - \frac{x}{z^2}y + \frac{y}{x^2}z + C$$

6.4: Riješiti diferencijalnu jednadžbu $(x\cos y + \sin 2y)y' = 1$.

Jednadžbu treba napisati u obliku

$\frac{dx}{dy} = x\cos y + \sin 2y$, gdje je tražena funkcija $x = x(y)$

Riješimo pripadnu homogenu jednadžbu

$\frac{dx}{dy} = x\cos y \rightarrow x = Ce^{\sin y}$

Rješenje nehomogene jednadžbe tražimo u obliku $x = C(y)e^{\sin y}$, gdje je C(y) tunkcija koju treba odrediti.

Uvrstimo derivaciju $\frac{dx}{dy} = C'(y)e^{\sin y} + C(y)e^{\sin y}\cos y$ u nehomogenu jednadžbu.

Dobivamo $C'(y) = e^{-\sin y}\sin 2y \rightarrow C(y) = -2e^{-\sin y}(\sin y + 1) + D$.

Uvrstimo dobivenu vrijednost od $C(y)$ u $x = C(y)e^{\sin y}$ dobit ćemo opće rješenje nehomogene jednadžbe $x = -2(\sin y + 1) + De^{\sin y}$

6.5: Odrediti sve krivulje u ravnini koje imaju svojstvo: ako bilo kojom točkom položimo pravce paralelno s koordinatnim osima do presjeka s tim osima, tada je površina dobivenog pravokutnika podijeljena krivujom u odnosu 1:2.

Još je Arhimed (-287,-212) znao da je površina parabole $y = x^2$ nad intervalom $[0, a]$ jednaka trećini pravokutnika osnovice a i visine a^2, .tj. $P = \frac{1}{3} a \cdot a^2$. Danas je nama lako pokazati da je to tako . Doista, $P = \int_0^a x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^a = \frac{1}{3} a \cdot a^2$. Lako je sada zaključiti :da je ostatak pravokutnika jednak $\frac{2}{3} a^3$, te da parabola dijeli pravokutnik u omjeru $1 : 2$ .Dakle, parabole imaju traženo svojstvo. Iz integralnog računa znamo da se površina krivulje $y = f(x)$ na intervalu $[0, a]$ računa po formuli $P = \int_0^a |f(x)|dx$.

Prema uvjetima zadatka, treba biti $\int_0^x |y|dx : (|xy| - \int_0^x |y|dx) = 1 : 2$. Odovuda sljedi

$$3\int_o^x |y|dx = |xy| \qquad (1)$$

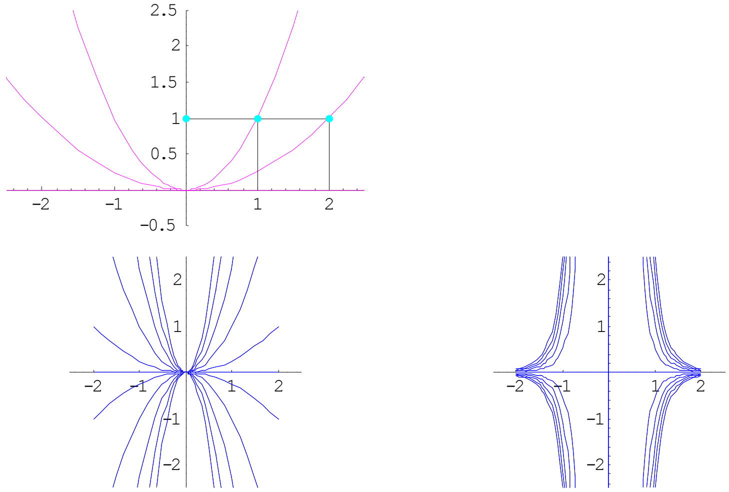
(Podsjetimo se :trostruka površina ispod parabole daje površinu pravokutnika).

Deriviranjem (1) dobivamo $3|y| = |xy|' \Leftrightarrow 3y = \pm(y + xy')$. To daje dvije jednadžbe sa separiranim varijablama : $2y = xy' \ odnosno \ -5y = xy'$.

Njihova rješenja su $y = \pm C^2x^2 \ odnosno \ y = \pm\frac{1}{C^5|x|^5}$ (vidi sliku 6.3)

Sa slike je vidljivo da uvjete zadatka zadovoljavaju samo parabole.

slika 6.3- zadatak 6.5



6.6: Odrediti ono rješenje diferencijalne jednadžbe $y''' - 2y'' + y' = 4(\sin x + \cos x)$, koje zadovoljava početni uvjet: $y(0) = 1;\ y'(0) = 0;\ y''(0) = -1$

Karakteristična jednadžba jednadžbe $r^3 - 2r^2 + r = 0$ ima korijene $r_1 = 0$, $r_{2,3} = 1$ pa je opće rješenje nehomogene jednadžbe $y = C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot e^x + C_3 xe^x$.
Odlučimo se za varijaciju konstanata i sastavimo sustav:

$$\begin{cases} C_1' \cdot 1 + C_2' \cdot e^x + C_3' \cdot xe^x = 0 \\ \qquad + C_2' \cdot e^x + C_3'(1 + x)e^x = 0 \\ \qquad + C_2' \cdot e^x + C_3'(2 + x)e^x = 4(\sin x + \cos x) \end{cases}$$

Riješimo li sustav dobit ćemo:
$C_1' = 4(\cos x + \sin x)$, $C_2' = 4(1 + x)(\cos x + \sin x)$, $C_3' = 4(\cos x + \sin x)$

Integriranjem izlazi:

$$C_1(x) = 4(\sin x - \cos x) + D_1$$
$$C_2(x) = 2\sin x + x(\sin x - \cos x) + D_2$$
$$C_3(x) = 4(\sin x - \cos x) + D_3$$

Opće rješenje je:
$$y = D_1 + D_2 e^x + D_3 xe^x + (4 - 2e^x + 5xe^x)\sin x - (4 + 5xe^x)\cos x$$

pismeni br.7

7.1: Funkciju $f(x)=|\sin x|$ razviti u Fourierov red na intervalu $[-\pi,\pi]$.

7.2: Neka je $u(x,y,z)=xy-z^2$. Odrediti veličinu i smjer vektora $grad u$ u točki M(-9,12,10). Kolika je derivacija u smjeru vektora koji s koordinatnim osima zatvara jednake tupe kutove ?

7.3: Izračunati $\oint_C xdx+ydy+yzdz$, gdje je C elipsa
$x=2sin^2t,\ \ y=4sint\,cost,\ \ z=2cos^2t$, $(0\le t\le\pi)$ orijentirana u smislu rastućeg parametra.

7.4: Pokazati da je polje $\vec{a}=yz(2x+y+z)\vec{i}+zx(x+2y+z)\vec{j}+xy(x+y+2z)\vec{k}$ polje potencijala i izračunati potencijal.

7.5: Odrediti krivulje u ravnini kojima tangenta u proizvoljnoj točki T raspolavlja kut između ordinate točke T i radijus vektora točke T.

7.6: Riješiti jednadžbu $y'''+y'=tgx$

RJEŠENJA

7.1: Funkciju $f(x)=|\sin x|$ razviti u Fourierov red na intervalu $[-\pi,\pi]$.

Funkcija je parna, pa u razvoju imamao samo kosinuse (razvoj u red kosinusa)

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x dx=\frac{2}{\pi}(-\cos x)\Big|_0^{\pi}=\frac{4}{\pi}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos nx dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[\sin(1-n)x+\sin(1+n)x]dx$$

Integriranjem dobivamo :

$$a_n=-\frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos(1-n)x}{1-n}+\frac{\cos(1+n)x}{1+n}\right]\Big|_0^{\pi}=-\frac{1}{\pi}\left[\frac{-(\cos n\pi+1)}{1-n}+\frac{-(\cos n\pi+1)}{1+n}\right]$$

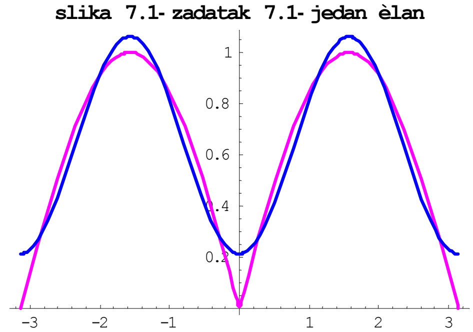
Zbrojimo li izraze u uglatoj zagradi dobivamo :

$$a_n=\begin{cases}-\dfrac{4}{\pi(n^2-1)} & za\ n=2k\\ 0 & za\ n=2k-1\end{cases}$$

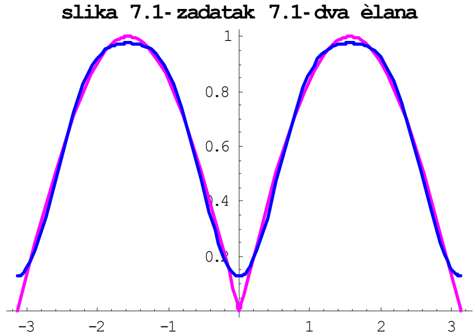
Konačno imamo ;

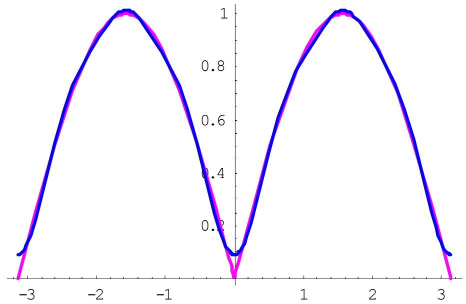
$$|\sin x|=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2kx}{(2k-1)(2k+1)}$$

slika 7.1- zadatak 7.1- jedan èlan



slika 7.1- zadatak 7.1- dva èlana





7.2: Neka je $u(x,y,z) = xy - z^2$. Odrediti veličinu i smjer vektora gradu u točki M(-9,12,10). Kolika je derivacija u smjeru vektora koji s koordinatnim osima zatvara jednake tupe kutove ?

Prema definiciji derivacije u smjeru vektora treba izračunati :

$$\frac{du}{dl} = gradu \cdot \vec{l}^{\,0} = \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_M \cdot \cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_M \cdot \cos\beta + \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_M \cdot \cos\gamma$$

gdje su $(\cos\alpha\ ,\ \cos\beta\ ,\ \cos\gamma) = (-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$ komponente jediničnog vektora u smjeru $\vec{l}$.

Nadalje je u točki M $gradu\Big|_M = 12\vec{i} - 9\vec{j} - 20\vec{k}$, pa je konačno: $\frac{du}{dl} = gradu \cdot \vec{l}^{\,0} = \frac{17}{\sqrt{3}}$.

Norma $\|gradu\| = \sqrt{144 + 81 + 400} = \sqrt{625} = 25$.

7.3: Izračunati $\oint_C xdx + ydy + yzdz$, gdje je C elipsa

$x = 2\sin^2 t,\ \ y = 4\sin t\cos t,\ \ z = 2\cos^2 t$, $(0 \le t \le \pi)$ orijentirana u smislu rastućeg parametra.

Da bismo izračunali integral potrebno je odrediti $xdx + ydy + zdz$

$$x = 2\sin^2 t \to dx = 4\sin t\cos tdt \to xdx = 8\sin^3 t\cos tdt$$

Kako je $y = 4\sin t\cos t \to dy = 4\cos 2tdt \to ydy = 4\sin 4tdt$

$$z = 2\cos^2 t \to dz = -4\cos t\sin tdt \to zdz = -8\cos^3 t\sin tdt$$

dobivamo prije svega

$xdx + ydy + yzdz = (16\cos^3 t\sin t - 8\sin^3 t\cos t - 32\cos^4 t\sin^2 t)dt$,

potom je $\oint_C xdx + ydy + yzdz = \int_0^{\pi} -32\cos^4 t\sin^2 tdt$

(jer su $\int_0^{\pi} 16\cos^3 t\sin tdt = 0,\ \int_0^{\pi} -8\sin^3 t\cos tdt = 0$)

Izračunajmo posljednji integral

$$\int_0^{\pi} -\ 32\ \cos^4\ t\ \sin^2\ tdt\ =\ -32\left[\frac{\sin^3\ t\ \cos^3\ t}{6}\Big|_0^{\pi}+\frac{3}{6}\int_0^{\pi}\sin^2\ t\ \cos^2\ tdt\right]=$$

$$=\ 32\left[\frac{3}{6}\int_0^{\pi}\sin^2\ t\ \cos^2\ tdt\right]\ =\ -\frac{96}{6}\left[\frac{t}{8}-\frac{\sin\ 4t}{32}\right]\Big|_0^{\pi}\ =\ -2\pi$$

7.4: Pokazati da je polje $\vec{a}=yz(2x+y+z)\vec{i}+zx(x+2y+z)\vec{j}+xy(x+y+2z)\vec{k}$ polje potencijala i izračunati potencijal.

Treba biti $rot\vec{a}=0\Leftrightarrow(R_y=Q_z\quad\&\quad P_z=R_x\quad\&\quad Q_x=P_y)$

Kako je to ispunjeno, tražena funkcija $u=u(x,y,z)$ dobije se integriranjem

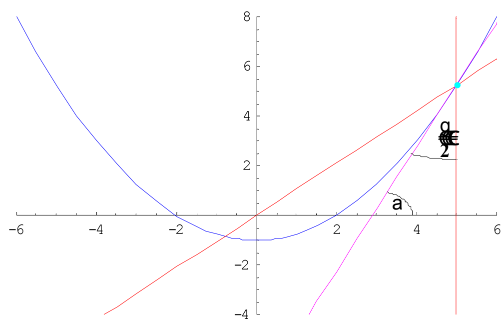
$u(x,y,z)=\int P(x,y,z)dx+f(y,z)=x^2yz+xy^2z+xyz^2+f(y,z)$

Kako, nadalje, mora biti $\frac{\partial u}{\partial y}=xz(x+2y+z)$, a s druge strane također i

$\frac{\partial u}{\partial y}=x^2z+2xyz+xz^2+f_y'(y,z)$, odavde slijedi $f_y'(y,z)=0\to f(y,z)=C$.

Konačno je $u=u(x,y,z)=xyz(x+y+z)+C$

7.5: Odrediti krivulje u ravnini kojima tangenta u proizvoljnoj točki T raspolavlja kut između ordinate točke T i radijus vektora točke T.



slika 7.2 zadatak 7.5

Prema uvjetima zadatka možemo pisati da vrijedi

$\alpha+\frac{\gamma}{2}=\frac{\pi}{2}\to\gamma=\pi-2\alpha\to tg\gamma=-tg2\alpha$

Kako su : $tg\gamma=\frac{x}{y}$ $\quad i \quad$ $tga=y'$ možemo pisati $tg\gamma=-tg2\alpha\Leftrightarrow\frac{x}{y}=-\frac{2y'}{1-y'^2}$

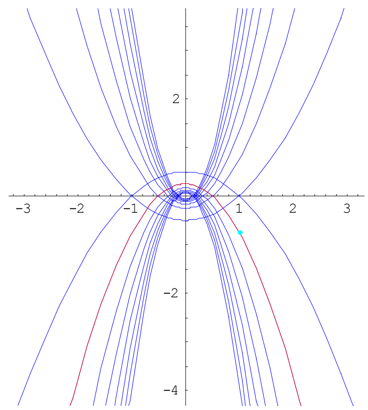
Riješimo posljednju jednadžbu po y' dobivamo homogene jednadžbe

$y' = \frac{y}{x} \pm \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}$ koje se svode na jednadžbe sa separiranim varijablama:

$\frac{dx}{x} = \pm \frac{du}{\sqrt{1+u^2}}$.

Integriranjem dobivamo familije parabola simetrično raspoređenih u odnosu na os apscisa (vidi sliku 7.3):

$y = \frac{C}{2}x^2 - \frac{1}{2C}$ odnosno $y = -\frac{C}{2}x^2 + \frac{1}{2C}$.



slika 7.3 – zadatak 7.5

7.6: Riješiti jednadžbu $y''' + y' = tgx$

Karakteristična jednadžba $r^3 + r = 0$ ima rješenja $r_1 = 0$ $, r_{2,3} = \pm i$ pa je opće rješenje homogene jednadžbe $y = C_1 \cdot 1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x$

Opće rješenje nehomogene tražimo u obliku

$y = C_1(x) \cdot 1 + C_2(x) \cos x + C_3(x) \sin x$

gdje su $C_1(x)$, $C_2(x)$, $C_3(x)$ tražene funkcije koje zadovoljavaju sustav:

$$\begin{cases} C_1' & +C_2' \cos x & +C_3' \sin x & = & o \\ & -C_2' \sin x & +C_3' \cos x & = & o \\ & -C_2' \cos x & -C_3' \sin x & = & tgx \end{cases}$$

Ako riješimo sustav i integriramo, izlazi:

$$C_1(x) = ln\left|\cos x\right| + D_1, \ \ C_2 = \cos x + D_2, \ \ C_3(x) = \sin x - ln(tg(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})) + D_3$$

Uvrstimo dobivene vrijednosti u $y = C_1(x) \cdot 1 + C_2(x) \cos x + C_3(x) \sin x$ dobivamo:

$$y = D_1 + D_2 \cos x + D_3 \sin x + 1 + \ln\left|\cos x\right| - \sin x \ln\left|tg(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})\right|.$$

pismeni br.8

8.1: Izračunati $\oint_C \vec{a} \cdot d\vec{r}$, gdje je $\vec{a} = (xz + y)\vec{i} + (yz - x)\vec{j} - (x^2 + y^2)\vec{k}$ i krivulja C kružnica $x^2 + y^2 = 4, z = 3$.

8.2: Naći cirkulaciju vektora $\vec{a} = y\vec{i} - 2z\vec{j} + x\vec{k}$ duž krivulje.
$\begin{cases} 2x^2 - y^2 + z^2 & = & R^2 \\ y & = & x \end{cases}$ pozitivno orijentirane u odnosu na vektor $\vec{i}$. Provjeriti odgovor Stokesovim poučkom.

8.3: Izračunati tok vektorskog polja $\vec{a} = x\vec{i} - y\vec{j} - xyz\vec{k}$ kroz vanjsku stranu plašta valjka $x^2 + y^2 = 1$ ograničenu plohom $z = 0$ i hiperboličkim paraboloidom $z = x^2 - y^2$.

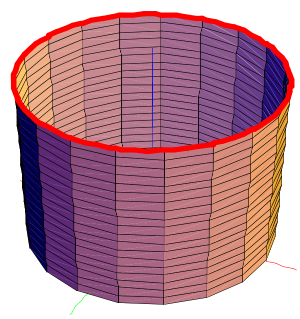
8.4: Odrediti krivulju koja prolazi točkom $(0.5, -1)$, i ima svojstvo da je duljina segmenta što ga na osi x odsjeca tangenta, jednaka kvadratu ordinate dirališta.

8.5: Odrediti ortogonalne trajektorije familije krivulja $x^2 + y^2 = 2ax$.

8.6: Odrediti rješenje diferencijalne jednadžbe $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = e^{2x}$ koje zadovoljava početni uvjet $y(0) = 1$; $y'(0) = 0$; $y''(0) = -2$.

RJEŠENJA

8.1: Izračunati $\oint_C \vec{a}\cdot d\vec{r}$,gdje je $\vec{a}=(xz+y)\vec{i}+(yz-x)\vec{j}-(x^2+y^2)\vec{k}$ i krivulja C kružnica $x^2+y^2=4, z=3$.



slika 8.1 – zadatak 8.1

a) prvi način:
Napišimo parametarsku jednadžbu kružnice: $x=2\cos t$, $y=2\sin t$, $z=3$.

Slijedi : $dx=-2\sin t dt$, $dy=2\cos t dt$, $dz=0$

$\vec{a}\cdot d\vec{r}=(xz+y)dx+(yz-x)dy-(x^2+y^2)dz$, pa je

$$\oint_C \vec{a}\cdot\vec{r}=\int_0^{2\pi}\left[(6\cos t+2\sin t)(-2\sin t)+(6\sin t-2\cos t)2\cos t\right]dt$$

$$=\int_0^{2\pi}-4(\cos^2 t+\sin^2 t)dt=-4\int_0^{2\pi}dt=-8\pi$$

b) drugi način:
Primjenom Stokesova poučka
$\oint_C \vec{a}\cdot d\vec{r}=\iint_\Sigma rot\vec{a}\cdot\vec{n}^0 dS$, gdje je $\sum\equiv x^2+y^2\le 4$ krug u ravnini $z=3$.

$$\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ xz+y & yz-x & -x^2-y^2\end{vmatrix}=-3y\,\vec{i}+3x\,\vec{j}-2\vec{k}\quad,\quad \vec{n}^0=\vec{k}\quad,\quad dS=\frac{dxdy}{|\cos\gamma|}=dxdy$$

$$\oint_C \vec{a}\cdot d\vec{r}=\iint_\Sigma rot\vec{a}\cdot\vec{n}^0 dS=-2\iint_{D_{xy}}dxdy=-8\pi\,.$$

8.2: Naći cirkulaciju vektora $\vec{a} = y\vec{i} - 2z\vec{j} + x\vec{k}$ duž krivulje $\begin{cases} 2x^2 - y^2 + z^2 = R^2 \\ y = x \end{cases}$ pozitivno orijentirane u odnosu na vektor $\vec{i}$. Provjeriti odgovor Stokesovim poučkom.

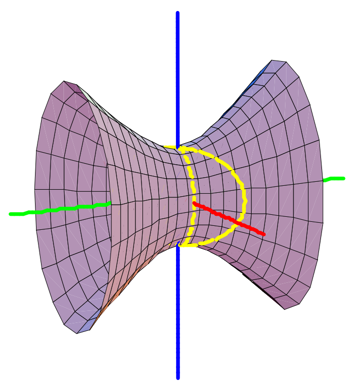
a) prvi način:

Presječna krivulja ima parametarske jednadžbe :

$$x = R\cos t \;,\; y = R\cos t \;,\; z = R\sin t$$
$$dx = -R\sin t dt \;,\; dy = -R\sin t dt \;,\; dz = R\cos t dt$$
$$\vec{a}\cdot d\vec{r} = ydx - 2zdy + xdz = \left[-R^2\cos t\sin t + 2R^2\sin^2 t + R^2\cos^2 t\right]dt$$
$$\int_C \vec{a}\cdot\vec{r} = \int_0^{2\pi}\left[-R^2\cos t\sin t + 2R^2\sin^2 t + R^2\cos^2 t\right]dt$$

Kako je prvi integral jednak nuli preostaje :

$$2R^2\int_0^{2\pi} sin^2\, tdt + R^2\int_0^{2\pi} cos^2\, tdt = 2R^2\left[\frac{t}{2} - \frac{sin\,2t}{4}\right]\Bigg|_0^{2\pi} + R^2\left[\frac{t}{2} + \frac{sin\,2t}{4}\right]\Bigg|_0^{2\pi} = 3R^2\pi$$



slika 8.2 – zadatak 8.2

b) drugi način:

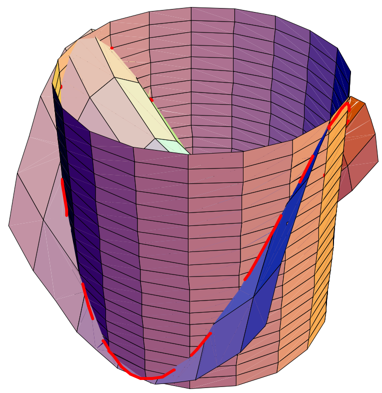
Pomoću Stokesova poučka: $\oint_C \vec{a}\cdot d\vec{r} = \iint_\Sigma rot\vec{a}\cdot\vec{n}^0 dS$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & -2z & x \end{vmatrix} = 2\,\vec{i} - \vec{j} - \vec{k} \quad,\quad \vec{n}^0 = \frac{\vec{i} - \vec{j}}{\sqrt{2}} \;,\; dS = \frac{dxdz}{|\cos\,\beta|} = \sqrt{2}dxdz$$

Ovdje je $\vec{n}^0 = \dfrac{grad[x - y]}{|grad[x - y]|} = \dfrac{i - j}{\sqrt{2}}$ (jer krivulja leži u ravnini $x - y = 0$).

Konačno je: $\oint_C \vec{a}\cdot d\vec{r} = \iint_\Sigma rot\vec{a}\cdot\vec{n}^0 dS = \iint_{D_{xz}} \dfrac{3}{\sqrt{2}}\sqrt{2}dxdz = 3R^2\pi$.

8.3: Izračunati tok vektorskog polja $\vec{a} = x\vec{i} - y\vec{j} - xyz^3\vec{k}$ kroz vanjsku stranu plašta valjka $x^2 + y^2 = 1$ ograničenu plohom $z = 0$ i hiperboličkim paraboloidom $z = x^2 - y^2$.



slika 8.3 – zadatak 8.3

Tok možemo izračunati po formuli (vidjeti u 6. u popisu literature)

$$\Pi = R\int_{\phi_1}^{\phi_2}\left[\int_{f_1(R\cos\phi, R\sin\phi)}^{f_2(R\cos\phi, R\sin\phi)}(\vec{a}\cdot\vec{n}^0)dz\right]d\phi$$, gdje su ϕ_1, ϕ_2 -granice od ϕ, a $f_1(x,y) \le z \le f_2(x,y)$ granice od z, a R radijus cilindra $x^2 + y^2 = R^2$.

U našem slučaju kako imamo dva simetrično postavljena dijela cilindrične plohe, pa je

$$\Pi = 2\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\left[\int_0^{\cos^2\phi-\sin^2\phi}\left(\cos^2\phi - \sin^2\phi\right)dz\right]d\phi$$ jer je $\vec{a}\cdot\vec{n}^0 = x^2 - y^2 = \cos^2\phi - \sin^2\phi$, a $\vec{n}^0 = x\vec{i} + y\vec{j}$.

Bit će dalje

$$\Pi = 2\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\left[\cos^2\phi - \sin^2\phi\right]^2 d\phi = 2\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\cos^2 2\phi d\phi = \frac{\pi}{2}$$

8.4: Odrediti krivulju koja prolazi točkom $(0.5, -1)$, i ima svojstvo da je duljina segmenta sto ga na osi x odsjeca tangenta, jednaka kvadratu ordinate dirališta.

Iz uvjeta zadatka dolazimo do linearne jednadžbe za traženu funkciju $x = x(y)$

Naime dobivenu jednadžbu $x - \frac{y}{y'} = y^2$ valja zapisati u ekvivalentnom obliku

$$\frac{dx}{dy} - \frac{1}{y}x = -y.$$

Opće rješenje homogene jednadžbe je $x = Cy$.

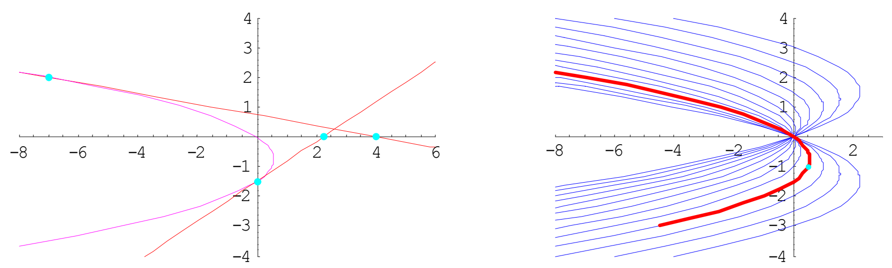
Potražimo opće rješenje nehomogene jednadžbe u obliku $x = C(y)y$, gdje se funkcija $C(y)$ određuje iz zahtjeva da $C(y)$ *i* $C'(y)$ zadovoljavaju nehomogenu jednadžbu.

Izlazi $C(y) = -y + D$, gdje je D konstanta integracije.

Konačno rješenje nehomogene jednadžbe $x = -y^2 + Dy$

Uvrštavanjem početnog uvjeta dobivamo konstantu $D = -\dfrac{3}{2}$, pa je posebno rješenje krivulja koja prolazi točkom $(0.5, -1)$: $x = -y^2 - \dfrac{3}{2}y$ (vidi sliku 8.4)

slika 8.4-zadatak 8.4



slika 8.4 a) slika8.4 b)

Na slici 8.4 a) tangente sjeku os apscisa u točkama čije su apscise jednake kvadratima odgovarajućih ordinata njihovih dirališta.
Na slici 8.4 b) među parabolama istaknuta je ona koja prolazi točkom $T(0.5,-1)$

8.5: Odrediti ortogonalne trajektorije familije krivulja $x^2 + y^2 = 2ax$.

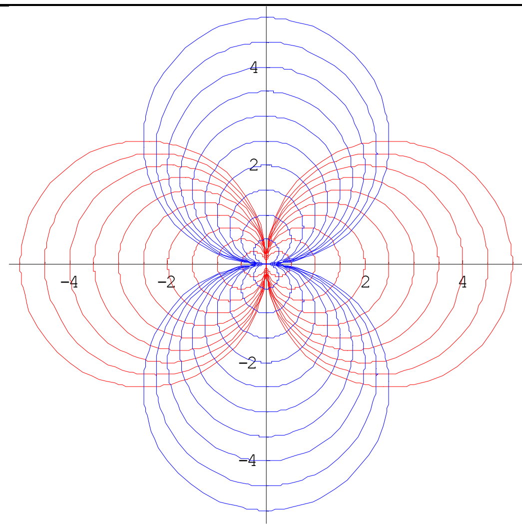
Ako iz jednadžbe i derivacije eliminiramo parametar a, dobivamo jednadžbu familije kružnica

$y' = \dfrac{y^2 - x^2}{2xy}$. Zamijenimo u toj jednadžbi $y' \to -\dfrac{1}{y'}$ dobivamo homogenu jednadžbu

$y' = \dfrac{2(\frac{y}{x})}{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2}$ .Susptitucijom $u = \dfrac{y}{x}$, $y' = u + x\dfrac{du}{dx}$ dobivamo jednadžbu

sa separiranim varijablama $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{(1-u^2)du}{u(1+u^2)}$. Integriranjem dobivamo $x^2 + y^2 = Cy$

Rješenje predstavlja familiju kružnica s centrom na osi y. (vidi sliku 8.5)



slika 8.5 – zadatak 8.5

8.6: Odrediti rješenje diferencijalne jednadžbe $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = e^{2x}$ koje zadovoljava početni uvjet $y(0) = 1$; $y'(0) = 0$; $y''(0) = -2$.

Karakteristična jednadzba $r^3 - 5r^2 + 8r - 4 = 0$ ima rješenja $r_1 = 1$, $r_{2,3} = 2$

Stoga su $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{2x}$, $y_3 = xe^{2x}$ rješenja homogene jednadžbe,
a opće rješenje homogene jednadžbe njihova linearna kombinacija tj.
$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + xC_3 e^{2x}$.

Partikularno rješenje nehomogene jednadžbe možemo tražiti varijacijom konstanata ili u obliku $\eta = x^2 A e^{2x}$.

Izračunajmo derivacije:

$$\eta' = Ae^{2x}(2x + 2x^2)$$
$$\eta'' = Ae^{2x}(2 + 8x + 4x^2) \quad .$$
$$\eta''' = Ae^{2x}(12 + 24x + 8x^2)$$

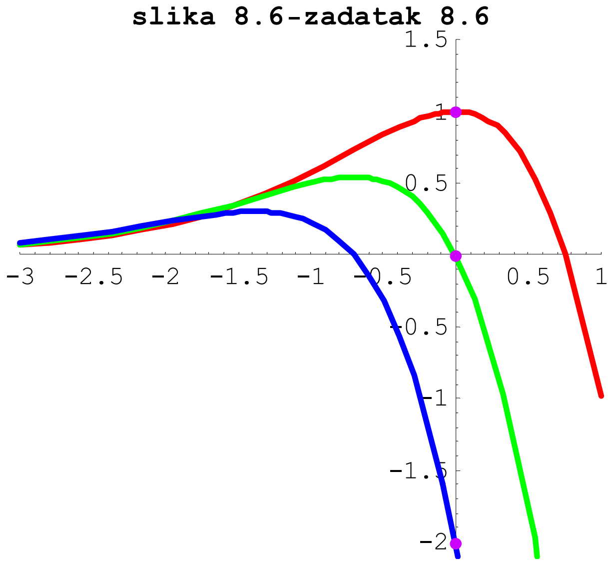
Uvrštavanjem derivacija u nehomogenu jednadžbu dobivamo $A = \frac{1}{2}$, pa je partikularno rješenje $\eta = x^2 A e^{2x} = \frac{1}{2} x^2 e^{2x}$

Opće rješenje nehomogene jednadžbe je

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + xC_3 e^{2x} + \frac{1}{2} x^2 e^{2x}$$

Uvrstimo li početni uvjet dobivamo $C_1 = 1$, $C_2 = 0$, $C_3 = -1$, što daje posebno rješenje

$$y = e^x - xe^{2x} + \frac{1}{2} x^2 e^{2x}$$



Na slici 8.6 nacrtane su krivulje:

1. $y = e^x - xe^{2x} + \frac{1}{2}x^2 e^{2x}$ - posebno rješenje., i $y(0) = 1$
2. $y' = e^x(1 + e^x(-1 - x + x^2))$ - derivacija posebnog rješenja, $y'(0) = 0$
3. $y'' = e^x(1 + e^x(-3 + 2x^2))$ - druga derivacija posebnog rješenja, $y''(0) = -2$

pismeni br.9

9.1: Odrediti derivaciju skalarnog polja $u(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ u točki M krivulje $\vec{r}(t) = R\cot\vec{i} + R\sin t\vec{j} + at\vec{k}$ u smjeru tangente u točki M, kojoj odgovara parametar $t = \dfrac{\pi}{2}$.

9.2: Odrediti cirkulaciju vektora $\vec{a} = y^2\vec{i} + xy\vec{j} + (x^2 + y^2)\vec{k}$ duž presjeka paraboloida $x^2 + y^2 = Rz$ ravninama $x \ge 0; y \ge 0; z = R$. Rezultat provjeriti Stokesovim poučkom.

9.3: Odrediti opće i singularno rješenje jednadžbe $y = xy' + \sqrt{1 + y'^2}$.

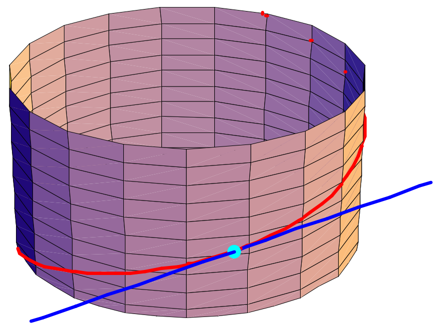
9.4: Odrediti ono rješenje diferencijalne jednadžbe $y''' - 3y'' + 3y' - y = 2e^x$.
Koje zadovoljava početni uvjet : $y(0) = 1; y'(0) = 3; y''(0) = 5.$

9.5: Izračunati tok vektora $\vec{a} = xz\vec{i} + yz\vec{j} + z^2\vec{k}$ kroz vanjski dio sfere $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ odsječen ravninom $z = 2\ (z \ge 2)$.

9.6: Pokazati da je polje $rot\vec{a}$ polje potencijala, ako je $\vec{a} = -xy^2\vec{i} - yz^2\vec{j} + zx^2\vec{k}$.
Odredi potencijal i izračunaj $\displaystyle\int_{(1,1,1)}^{(3,4,5)} rot\vec{a} \cdot d\vec{r}$

RJEŠENJA

9.1: Odredi derivaciju skalarnog polja $u(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ u točki M krivulje $\vec{r}(t)=R\cos t\,\vec{i}+R\sin t\,\vec{j}+at\,\vec{k}$ u smjeru tangente u točki M, kojoj odgovara parametar $t=\dfrac{\pi}{2}$



slika 9.1 – zadatak 9.1

Točka kojoj odgovara parametar $t=\dfrac{\pi}{2}$ ima koordinate $M=(0,R,\dfrac{a\pi}{2})$ i potrebno je izračunati derivaciju u smjeru tangente u točki M tj.

$$\frac{du}{dt}=U_x\Big|_M\cdot\cos\alpha+U_y\Big|_M\cdot\cos\beta+U_z\Big|_M\cdot\cos\gamma\,,$$

gdje su $U_x\Big|_M$, $U_y\Big|_M$, $U_z\Big|_M$ parcijalne derivacije funkcije u točki M, a $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ kosinusi smjera jediničnog vektora tangente.

$$U_x\Big|_M=2x=0\ ,\ U_y\Big|_M=2y=2R\ ,\ U_z\Big|_M=2z=a\pi$$

jednadžba tangente u bilo kojoj točki M je $\dfrac{x-x_M}{\dot{x}_M}=\dfrac{y-y_M}{\dot{y}_M}=\dfrac{z-z_M}{\dot{z}_M}$ ili

$\dfrac{x}{-R}=\dfrac{y-R}{0}=\dfrac{z-\frac{a\pi}{2}}{a}$ pa je vektor tangente

$\vec{t}=(-R,0,a)\rightarrow\vec{t}^{\,0}=(\dfrac{-R}{\sqrt{a^2+R^2}},0,\dfrac{a}{\sqrt{a^2+R^2}})$, a iz toga sljedi:

$$\cos\alpha=\frac{-R}{\sqrt{a^2+R^2}}\ ,\ \cos\beta=0\ ,\ \cos\gamma=\frac{a}{\sqrt{a^2+R^2}}$$

Konačno je :

$$\frac{dU}{dt}=gradF\cdot\vec{t}^{\,0}=\frac{a^2\pi}{\sqrt{a^2+R^2}}$$

9.2: Odrediti cirkulaciju vektora $\vec{a} = y^2\vec{i} + xy\vec{j} + (x^2 + y^2)\vec{k}$ duž presjeka paraboloida $x^2 + y^2 = Rz$ koordinatnim ravninama ($x \geq 0;\ y \geq 0;\ z = R$). Rezultat provjeriti Stokesovim poučkom.

a) direktno

Krivulja C se sastoji od tri luka $C = C_1 + C_2 + C_3$, gdje su redom :

$C_1 - luk\ \ parabole\ \ x^2 = Rz\ ,\ y = 0$

$C_2 - luk\ \ parabole\ \ y^2 = Rz\ ,\ x = 0$

$C_3 - luk\ \ kruznice\ \ x^2 + y^2 = R^2\ ,\ z = R$

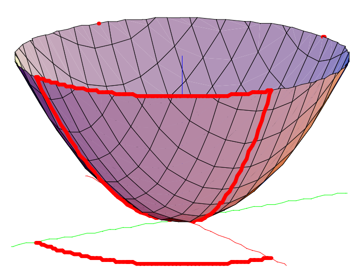
$$\int_C \vec{a}\cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{a}\cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{a}\cdot d\vec{r} + \int_{C_3} \vec{a}\cdot d\vec{r}$$

$$\int_{C_1} \vec{a}\cdot d\vec{r} = \frac{2}{R}\int_R^0 x^3 dx = -\frac{R^3}{2}$$

$$\int_{C_2} \vec{a}\cdot d\vec{r} = \frac{2}{R}\int_0^R y^3 dy = \frac{R^3}{2}$$

$$\int_{C_3} \vec{a}\cdot d\vec{r} = -R^3 \int_{\pi/2}^{0} (\sin^3 t - \cos^3 t \sin t)dt = R^3\left[\cos t - \frac{2}{3}\cos^3 t\right]\Big|_{\pi/2}^{0} = \frac{R^3}{3}$$

Ukupno: $\displaystyle\int_C \vec{a}\cdot d\vec{r} = \frac{R^3}{3}$



slika 9.2 – zadatak 9.2

b) pomoću Stokesova poučka

$$\oint_C \vec{a}\cdot d\vec{r} = \iint_S (rot\vec{a}\cdot\vec{n}^0)dS = \iint_{Dxy} y\,dxdy = \int_0^{\pi/2}\left[\int_0^R\left[r^2 \sin\phi\right]dr\right]d\phi =$$

$$= \int_0^{\pi/2}\left[\sin\phi\left[\frac{r^2}{3}\right]\Big|_0^R\right]d\phi = \frac{R^3}{3}\int_0^{\pi/2}\sin\phi\, d\phi = \frac{R^3}{3}\left[-\cos\phi\right]\Big|_0^{\pi/2} = \frac{R^3}{3}$$

9.3: Odrediti opće i singularno rješenje jednadžbe $y = xy' + \sqrt{1+y'^2}$.

Uvedemo li zamjenu $y' = p$ dobivamo $y = xp + \sqrt{1+p^2}$ .Deriviranjem po x dobivamo :

$$p = p + x\frac{dp}{dx} + \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\frac{dp}{dx} \to \frac{dp}{dx}(x + \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}) = 0$$

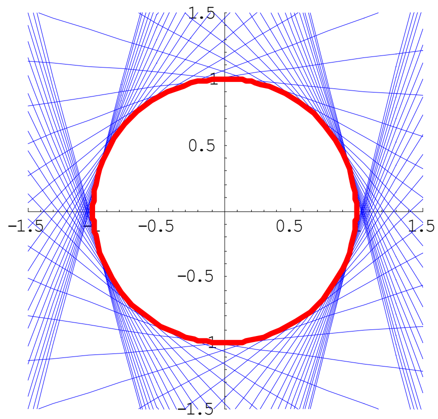
Ako je $\frac{dp}{dx} = 0 \to p = C \to y = Cx + \sqrt{1+C^2}$, što predstavlja familiju pravaca. Dakle opće rješenje je $y = Cx + \sqrt{1+C^2}$

Ako je $x + \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} = 0 \to x = -\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$

Da dobijemo singularno rješenje eliminaramo parametar p iz jednadžbi:

$$y = xp + \sqrt{1+p^2} \quad \& \quad x = -\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$$

dobivamo $x^2 + y^2 = 1$, što predstavlja anvelopu familije pravaca.
(vidi sliku 9.3)



slika 9.3 – zadatak 9.3

9.4: Odrediti ono rješenje diferencijalne jednadžbe $y''' - 3y'' + 3y' - y = 2e^x$ .koje zadovoljava početni uvjet : $y(0) = 1; y'(0) = 3; y''(0) = 5$.

Karakteristična jednadžba $r^3 - 3r^2 + 3r - 1 = 0$ ima trostruki korijen $r_{1,2,3} = 1$

Shodno tome su $y_1 = e^x$, $y_2 = xe^x$, $y_3 = x^2e^x$ rješenja homogene jednadžbe, a njihova linearna kombinacija :

$y = C_1y_1 + C_2y_2 + C_3y_3 = (C_1 + xC_2 + x^2C_3)e^x$ opće rješenje homogene jednadžbe.

Partikularno rješenje tražimo u obliku $\eta = x^3Ae^x$

Da bismo odredili konstantu A izračunajmo derivacije i uvrstimo ih u nehomogenu jednadžbu, bit će :

$\eta' = Ae^x(3x^2 + x^3)$

$\eta'' = Ae^x(x^3 + 6x^2 + 6x)$

$\eta''' = Ae^x(x^3 + 9x^2 + 18x + 6)$

Nakon sređivanja dobivamo $A = \frac{1}{3}$, što daje $\eta = \frac{1}{3}x^3e^x$.

Konačno opće je rješenje jednadžbe $y = (C_1 + xC_2 + x^2C_3)e^x + \frac{1}{3}x^3e^x$

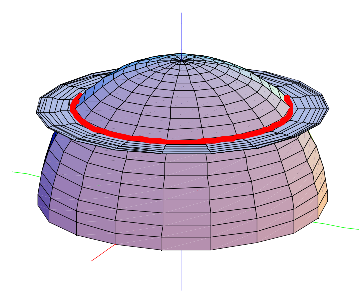
Da dobijemo posebno rješenje izračunamo derivacije i uvrstimo početni uvjet .Tako dolazimo do sustava :

$$\begin{cases} C_1 & & & = & 1 \\ C_1 & +C_2 & & = & 3 \\ C_1 & +2C_2 & +2C_3 & = & 5 \end{cases}$$

Rješenje sustava je uređena trojka $(C_1, C_2, C_3) = (1,2,0)$

Posebno rješenje je : $(1 + 2x + \frac{1}{3}x^3)e^x$

9.5: Izračunati tok vektora $\vec{a} = xz\vec{i} + yz\vec{j} + z^2\vec{k}$ kroz vanjski dio sfere $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ odsječen ravninom $z = 2$ $(z \geq 2)$.



slika 9.4 – zadatak 9.5

a) prvi način

$$\vec{n}^0 = \frac{grad\left[x^2 + y^2 + z^2 - 9\right]}{\left\|grad\left[x^2 + y^2 + z^2 - 9\right]\right\|} = \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{3} \quad , \quad dS = \frac{dxdy}{|\cos\gamma|} = \frac{3dxdy}{z}$$

Prema tome je tok

$$\iint_S (\vec{a} \cdot \vec{n}^0) dS = \iint_{Dxy} \left[\frac{(x^2 + y^2)z + z^3}{3} \cdot \frac{3}{z}\right] dxdy =$$

$$= \iint_{Dxy} \left[x^2 + y^2 + z^2\right] dxdy = \iint_{Dxy} 9dxdy = 9\iint_{Dxy} dxdy = 45\pi$$

b) drugi način

Primjenimo teorem o divergenciji $\iint\limits_S (\vec{a}\cdot\vec{n}^0)dS = \iiint\limits_V div\vec{a}dV$

Kako je $div\vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z} = 4z$, bit ce $\iiint\limits_V div\vec{a}dV = 4\iiint\limits_V zdzdydx$

Uvedemo li cilindrične koordinate: $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$, $z = z$, granice integracije će biti: $r\Big|_0^{\sqrt{5}}$, $\phi\Big|_0^{2\pi}$, $z\Big|_2^{\sqrt{9-r^2}}$. Nadalje imamo da je tok

$$\Pi = 4\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\sqrt{5}}\left[\int_2^{\sqrt{9-r^2}} zdz\right]rdr\right]d\phi = 4\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\sqrt{5}}\left[\frac{z^2}{2}\Big|_2^{\sqrt{9-r^2}}\right]rdr\right]d\phi =$$

$$= 2\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\sqrt{5}}\left[5-r^2\right]rdr\right]d\phi = 2\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\sqrt{5}}\left[5r-r^3\right]dr\right]d\phi =$$

$$= 2\int_0^{2\pi}\left[5\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right]\Big|_0^{\sqrt{5}} d\phi = 25\pi$$

Treba još oduzeti tok kroz krug $x^2 + y^2 = 5, z = 2$, koji iznosi -20π .

to daje ukupni tok $\Pi = 25\pi - (-20\pi) = 45\pi$.

9.6: Pokazati da je polje $rot\vec{a}$ polje potencijala. Odrediti potencijal i izračunati $\int\limits_{(1,1,1)}^{(3,4,5)} rot\vec{a}\ \cdot\ d\vec{r}$.

Da bi polje $rot\vec{a}$ bilo potencijalno mora biti $rot(rot\vec{a}) = 0$

$$rot\left(rot\vec{a}\right) = rot\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ -xy^2 & -yz^2 & zx^2\end{vmatrix} = rot\left[2zy\vec{i}+2xz\vec{j}+2xy\vec{k}\right] = \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 2yz & 2xz & 2xy\end{vmatrix} = 0$$

Tražimo funkciju U(x,y,z) za koju vrijedi $gradU = rot\vec{a}$ ili

$U_x\vec{i} + U_y\vec{j} + U_z\vec{k} = 2zy\,\vec{i} + 2xz\,\vec{j} + 2xy\,\vec{k}$

Drugim rječima funkcija U(x,y,z) zadovoljava :

$U_x = 2yz$, $U_y = 2xz$, $U_z = 2xy$

Integriranjem npr. prve jednadžbe dobivamo $U(x,y,z)=2xyz+f(y,z)$, gdje je $f(y,z)$ konstanta integracije i ne ovisi o x . Odredimo $f(y,z)$ koristimo drugu od gornjih jenakosti prema kojoj je
$U_y=2xz$ odnosno $U_y=2xz+f_y(y,z)$

Iz te dvije relacije sljedi $f_y(y,z)=0$, tj. $f(y,\ z) = C$, pa je

$$U(x,\ y,\ z) = 2xyz + C$$

Dakle vrijedi $dU=U_x dx+U_y dy+U_z dz=2yzdx+2zxdy+xyddz=rot\bar{a}\cdot d\bar{r}$
Na osnovi toga je

$$\int_{(1,1,1)}^{(3,4,5)} rot\bar{a} \cdot d\bar{r} = \int_{(1,1,1)}^{(3,4,5)} dU = U(x,\ y,\ z)\Big|_{(1,1,1)}^{(3,4,5)} = \left[2xyz + C\right]\Big|_{(1,1,1)}^{(3,4,5)} = 118$$

Integral možemo izračunati i na drugi način. Kako je polje potencijalno, krivuljni integral ne ovisi o putu, već samo o početnoj i završnoj točki.

Pravac AB, gdje su $A=(1{,}1{,}1)$, $B=(3{,}4{,}5)$ ima parametarske jednadžbe $x=1+2t$, $y=1+3t$, $z=1+4t$. Točki A pripada parametar t =0, točki B, parametar t = 1.

Integral nakon sređivanja postaje:

$$\int_{(1,1,1)}^{(3,4,5)} rot\bar{a}\cdot d\bar{r} = 2\int_0^1 \left[9+52t+72t^2\right]dt = 2\left[9t+52\frac{t^2}{2}+72\frac{t^3}{3}\right]\Big|_0^1 = 118$$

pismeni br.10

10.1: Odrediti interval konvergencije reda $\sum \frac{2^n}{n+1} x^n$ i ispitati ponašanje na krajevima intervala.

10.2: Izračunati $\oint\limits_C e^x \left[(1 - \cos y)dx - (y - \sin y)dy\right]$, gdje je C kontura područja $0 \le x \le \pi$, $0 \le y \le \sin x$, smjer obilaženja pozitivan.

10.3: Riješiti jednadžbu $y' + 2xy = y^2 e^{x^2}$.

10.4: Odrediti tikularno rješenje jednadžbe $y''' - y' = -2x$ koje zadovoljava početni uvjet $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 2$.

10.5: Izračunati $\iint\limits_S (x + y + z)dS$, gdje je S gornja polovica sfere $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \ge 0$

10.6: Pokazati da je polje $\vec{a} = (2xy + z)\vec{i} + (x^2 - 2y)\vec{j} + x\vec{k}$ polje potencijala, odrediti potencijal i izračunati $\int\limits_{(1,1,1)}^{(3,4,5)} \vec{a} \cdot d\vec{r}$.

RJEŠENJA

10.1: Odrediti interval konvergencije reda $\sum \frac{2^n}{n+1} x^n$ i ispitati ponašanje na krajevima intervala.

Primjenimo D'Alembertov kriterij na apsolutne vrijedenosti članova reda. $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{2^{n+1} x^{n+1}}{n+2} \cdot \frac{n+1}{2^n x^n}\right| = 2\frac{n+1}{n+2}|x| \to \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 2|x| < 1$

Prema tome interval konvergencije je $< -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} >$

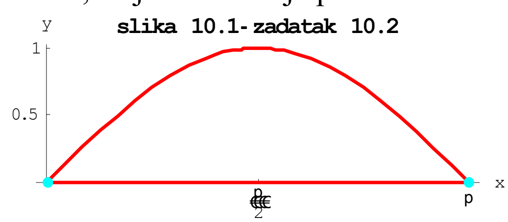
Ponašanje na krajevima intervala

Ako je $x = -\frac{1}{2}$ red je $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ i konvergira po Leibnizovom kriteriju.

Ako je $x = \frac{1}{2}$ red je $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ i divergira . Na taj način interval konvergencije je zatvoren slijeva a otvoren zdesna tj. $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle$.

10.2: Izračunati $\oint\limits_C e^x\left[(1-\cos y)dx - (y - \sin y)dy\right]$, gdje je C kontura područja

$0 \le x \le \pi$, $0 \le y \le \sin x$, smjer obilaženja pozitivan.



slika 10.1 – zadatak 10.2

Primjenimo Greenovu formulu :

$$\oint\limits_C \vec{a}\cdot d\vec{r} = \iint\limits_S \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right] dxdy = -\iint\limits_S ye^x dxdy =$$

$$= -\int\limits_{\pi}^{0} (e^x \frac{y^2}{2} \Big|_0^{\sin x})dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi} e^x \sin^2 xdx =$$

$$\frac{1}{2}\left\{\left[\frac{e^x \sin x}{5}(\sin x - 2\cos x\right]\Big|_0^{\pi} + \frac{2}{5}\int\limits_0^{\pi} e^x dx\right\} = \frac{1}{5}(e^{\pi} - 1)$$

10.3: Riješiti jednadžbu $y' + 2xy = y^2 e^{x^2}$.

Radi se o Bernoullijevoj jednadžbi koju supstitucijom $\frac{1}{y} = z$ svodimo na linearnu jednadžbu $z' - 2xz = -e^{x^2}$. Rešimo je varijacijom konstante.

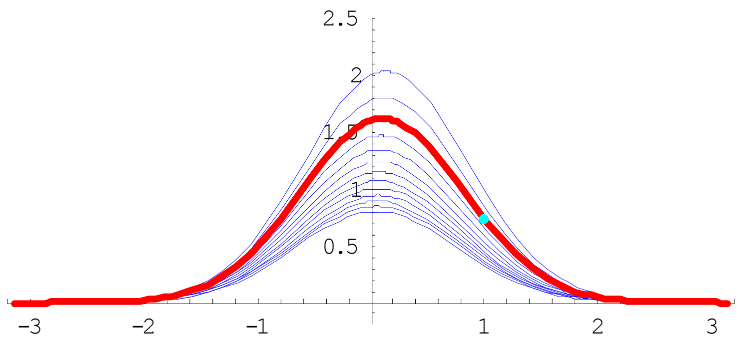
Homogena jednadžba $z' - 2xz = 0$ ima rješenje $z = Ce^{x^2}$. Rješenje nehomogene jednadžbe tražimo u obliku $z = C(x)e^{x^2}$ .Uvrstimo z ,i z' u nehomogenu jednadžbu dobivamo

$C'(x)e^{x^2} + 2xC(x)e^{x^2} - 2xC(x)e^{x^2} = -e^{x^2}$

ili

$C'(x) = -1 \rightarrow C(x) = -x + D$

Time dobivamo rješenje nehomogene jednadžbe $z = (D - x)e^{x^2}$.
Vratimo se na supstituciju i dobivamo konačno rješenje polazne jednadžbe
$y = \frac{1}{z} = \frac{e^{-x^2}}{D - x}$, gdje je D konstanta integracije.



slika 10.2 – zadatak 10.3

10.4: Odredi partikularno rješenje jednadžbe $y''' - y' = -2x$ koje zadovoljava početni uvjet $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 2$

Karakteristična jednadžba $r^3 - r = 0 \rightarrow r_1 = 0$, $r_2 = -1$, $r_3 = 1$

Prema tome homogena jednadžba ima rješenja:
$y_1 = 1$, $y_2 = e^{-x}$, $y_3 = e^x$

Opće rješenje homogene jednadžbe je njihova linearna kombinacija
$y = C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot e^{-x} + C_3 \cdot e^x$

Opće rješenje nehomogene jednadžbe možemo odrediti na dva načina:

a) varijacijom konstanata,

b) pogađanjem partikularnog rješenja nehomogene jednadžbe.

U slučaju b) opće rješenje nehomogene jednadžbe se dobije kao zbroj općeg rješenja homogene i toga partikularnog (pogođenog) rješenja nehomogene jednadžbe
Iskustvo pokazuje da su studenti često loši pogađači, ovdje ću stoga provesti obje metode.

a) metoda varijacije konstanata:
Pretpostavljamo da je opće rješenje nehomogene jednadžbe oblika:
$y = C_1(x) + C_2(x)e^{-x} + C_3(x)e^{x}$

Funkcije $C_1(x), C_2(x), C_3(x)$ određujemo iz sustava

$$\begin{cases} C_1' + C_2' e^{-x} + C_3' e^{x} = 0 \\ -C_2' e^{-x} + C_3' e^{x} = 0 \\ +C_2' e^{-x} + C_3' e^{x} = -2x \end{cases}$$

Rješenje sustava je uređena trojka $(C_1', C_2', C_3') = (2x, -xe^{x}, -xe^{-x})$
Integriranjem dobivamo :
$C_1(x) = x^2 + D_1$
$C_2(x) = -(x-1)e^{x} + D_2$
$C_3(x) = (x+1)e^{-x} + D_3$
Nakon uvrštavanja i sređivanja dobivamo opće rješenje : $y = D_1 + D_2 e^{-x} + D_3 e^{x} + x^2$

b) metoda partiklularnog rješenja
Pretpostavimo partikularno rješenje u obliku $\eta = x^1 \cdot Ax$ (jer je 0 jednostruki korijen karakteristične jednadžbe)
Odredimo derivacije $\eta' = 2Ax$,$\eta'' = 2A$, $\eta''' = 0$ i uvrstimo u nehomogenu jednadžbu, dobivamo $A = 1 \rightarrow \eta = x^2$ pa je opće rješenje $y = y_0 + \eta = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^{x} + x^2$

10.5: Izračunati $\iint\limits_S (x+y+z)dS$, gdje je S gornja polovica sfere $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$.

Prvi način:

$$z = \sqrt{1-(x^2+y^2)} \rightarrow dS = \sqrt{1 + z_x^{\,2} + z_y^{\,2}}\,dxdy = \frac{1}{\sqrt{1-(x^2+y^2)}}dxdy$$

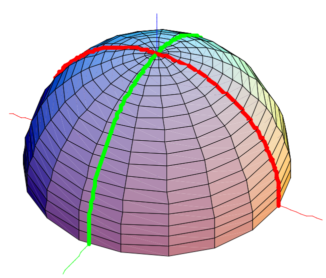
$$\iint\limits_S (x+y+z)dS = \iint\limits_S \left[\frac{x+y}{\sqrt{1-(x^2+y^2)}} + 1 \right] dxdy$$

Uvodimo polarne koordinate: $x = r\,cos\,\phi$, $y = r\,sin\,\phi$, $dxdy = rdrd\phi$

Granice : $r\Big|_0^1$, $\phi\Big|_0^{2\pi}$

$$\iint_S \left[\frac{r(cos\,\phi + sin\,\phi)}{\sqrt{1-r^2}} + 1\right] rdrd\phi =$$
$$= \int_0^{2\pi}\left[\int_0^1 \frac{r^2(cos\,\phi + sin\,\phi)}{\sqrt{1-r^2}}\,dr\right]d\phi + \int_0^{2\pi}\left[\int_0^1 rdr\right]d\phi =$$
$$= \int_0^{2\pi}(cos\,\phi + sin\,\phi)d\phi \int_0^1 \frac{r^2dr}{\sqrt{1-r^2}} + \int_0^{2\pi}\left[\frac{r^2}{2}\Big|_0^1\right]d\phi = \pi$$

Naime, pokazuje se da je integral $\int_0^{2\pi}(cos\,\phi + sin\,\phi)d\phi \int_0^1 \frac{r^2dr}{\sqrt{1-r^2}}$ jednak nuli, bez obzira koju vrijednost ima $\int_0^1 \frac{r^2dr}{\sqrt{1-r^2}}$



slika 10.3 – zadatak 10.5

Drugi način:
Uvedimo sferne koordinate. Budući da se radi o jediničnoj sferi bit će
$x = sin\,\vartheta\,cos\,\phi$, $y = sin\,\vartheta\,sin\,\phi$, $z = cos\,\vartheta$.

Granice : $\vartheta\Big|_0^{\pi/2}$, $\phi\Big|_0^{2\pi}$

Element plohe dS se računa po formuli
$dS = \sqrt{EG - F^2}\,d\phi d\vartheta$

$$dS = \sqrt{EG - F^2}\,d\phi d\vartheta = \sin\vartheta d\phi d\vartheta \quad , jer \quad je$$
$$E = x_\phi^{\ 2} + y_\phi^{\ 2} + z_\phi^{\ 2} = \sin^2\vartheta$$
$$G = x_\vartheta^{\ 2} + y_\vartheta^{\ 2} + z_\vartheta^{\ 2} = 1$$
$$F = x_\phi \cdot x_\vartheta + y_\phi \cdot y_\vartheta + z_\phi \cdot z_\vartheta = 0$$

Na taj način dobivamo

$$\iint_S (x+y+z)dS =$$
$$= \int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\pi/2}\left[sin^2\vartheta(cos\phi + sin\phi)\right]d\vartheta\right]d\phi + \int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\pi/2} cos\vartheta \, sin\vartheta d\vartheta\right]d\phi = \int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\pi/2} cos\vartheta \, sin\vartheta d\vartheta\right]d\phi = \pi$$

Može se pokazati da je integral

$\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\pi/2}\left[sin^2\vartheta(cos\phi + sin\phi)\right]d\vartheta\right]d\phi$ jednak nuli

Naime, vrijedi:

$$\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\pi/2}\left[sin^2\vartheta(cos\phi + sin\phi)\right]d\vartheta\right]d\phi = \int_0^{2\pi}\left[(cos\phi + sin\phi)\int_0^{\pi/2} sin^2\vartheta d\vartheta\right]d\phi =$$
$$= \int_0^{2\pi}\left[(cos\phi + sin\phi)\left[\frac{\vartheta}{2} + \frac{sin2\vartheta}{4}\right]\Big|_0^{\pi/2}\right]d\phi = \frac{\pi}{4}\int_0^{2\pi}\left[(cos\phi + sin\phi)\right]d\phi = \frac{\pi}{4}\left[sin\phi - cos\phi\right]\Big|_0^{2\pi} = 0$$

10.6: Pokazati da je polje $\vec{a} = (2xy+z)\vec{i} + (x^2-2y)\vec{j} + x\vec{k}$ polje potencijala ,odrediti potencijal i izračunati $\int_{(1,1,1)}^{(3,4,5)} \vec{a}\cdot d\vec{r}$.

Polje je potencijalno ako je $rot\vec{a} = 0$ tj.ako je

$$rot\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xy+z & x^2-2y & x \end{vmatrix} = 0\vec{i} - 0\vec{j} + (2x-2x)\vec{k} = 0$$

Tražimo funkciju $U(x,y,z)$ za koju vrijedi relacija $gradU = \vec{a}$ tj.

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2xy+z \ , \ \frac{\partial U}{\partial y} = x^2-2y \ , \ \frac{\partial U}{\partial z} = x \, .$$

Integriranjem bilo koje od gornje tri jednakosti možemo odrediti traženu funkciju.
Npr. integrirajmo posljednju.

Dobivamo $U(x,y,z)=\int xdz+f(x,y)=xz+f(x,y)$, gdje je $f(x,y)$ konstanta integracije (ne ovisi o z). Funkcija mora zadovoljavati i ostale dvije jednakosti:

Korištenjem prve jednakosti:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2xy + z = z + f_x'(x, y) \rightarrow f_x'(x, y) = 2xy \rightarrow f(x, y) = x^2 y + g(y)$$

dobivamo da je tražena funkcija $U(x,y,z)=xz+x^2y+g(y)$

Korištenjem druge jednakosti:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = x^2 - 2y = x^2 + g_y'(y) \rightarrow g_y'(y) = -2y \rightarrow g(y) = -y^2 + C$$

Konačno, tražena funkcija $U(x,y,z)\equiv xz+x^2y-y^2+C$

Kako je $gradU=\bar{a}$, to je $\bar{a}\cdot d\bar{r}=\frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial U}{\partial y}dy+\frac{\partial U}{\partial z}dz=dU(x,y,z)$

Slijedi $\int\limits_{(1,1,1)}^{(3,4,5)}\bar{a}\cdot d\bar{r}=\int\limits_{(1,1,1)}^{(3,4,5)}dU(x,y,z)=U(x,y,z)\Big|_{(1,1,1)}^{(3,4,5)}=34$