pismeni br.11

11.1: Odrediti interval konvergencije reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{3^{n-1}\sqrt{n}}$.

11.2: Metodom varijacije konstante odrediti opće rješenje jednadžbe $(x-1)y' + xy = e^{-x}$

11.3: Izračunati $\int_K (x^2 + 2xy)dy$, gdje je K gornja polovica elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ pređena od točke $A(-a,0)$ *do* $B(a,0)$.

11.4: Izračunati $I = \iint_S (z + 2x + \frac{4}{3}y)dS$, gdje je S dio ravnine $6x + 4y + 3z - 12 = 0$ u prvom oktantu.

11.5: Izračunati tok vektora $\vec{a} = zy\vec{i} - x\vec{j} - y\vec{k}$ kroz vanjsku stranu površine koja omeđuje tijelo $x^2 + z^2 \le y^2$, $0 \le y \le 1$.

11.6: Dokazati da je funkcija $w = ze^z$ analitička .

RJEŠENJA

11.1: Odrediti interval konvergencije reda $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-x)^n}{3^{n-1}\sqrt{n}}$.

Odredimo $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(-x)^{n+1}}{3^n\sqrt{n+1}}\cdot\frac{3^{n-1}\sqrt{n}}{(-x)^n}\right| = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{n}{n+1}}|-x|$ i izračunajmo limes

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{n+1}}|x| = \frac{|x|}{3} \to \frac{|x|}{3} < 1 \Leftrightarrow |x| < 3 \Leftrightarrow -3 < x < 3$$

Ako je $x = 3$ onda imamo red $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3(-1)^n}{\sqrt{n}}$ koji konvergira po Leibnizovom kriteriju ,

jer je: $|a_{n+1}| = \frac{3}{\sqrt{n+1}} < \frac{3}{\sqrt{n}} = |a_n|$ & $\lim_{n\to\infty}|a_n| = \lim_{n\to\infty}\frac{3}{\sqrt{n}} = 0$

Ako je $x = -3$ onda imamo red $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{\sqrt{n}}$ koji divergira.

Prema tome interval konvergencije je $\langle -3, 3]$.

11.2: Metodom varijacije konstante odrediti opće rješenje jednadžbe $(x-1)y' + xy = e^{-x}$

Radi se o linearnoj jednadžbi, pa odredimo rješenje homogene jednadžbe

$$y' + \frac{x}{x-1}y = 0 \to \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{x-1}y \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{xdx}{x-1}$$

Integriranjem dobivamo opće rješenje homogene jednadžbe $y = \frac{Ce^{-x}}{x-1}$.

Pretpostavimo da je opće rješenje oblika $y = \frac{C(x)e^{-x}}{x-1}$ i odredimo funkciju C(x).

Izračunamo derivaciju $y' = \frac{(x-1)C'(x)e^{-x} - xC(x)e^{-x}}{(x-1)^2}$ pa derivaciju i funkciju uvrstimo u

jednadžbu. Izlazi $\frac{C'(x)e^{-x}}{x-1} = \frac{e^{-x}}{x-1} \Rightarrow C'(x) = 1 \to C(x) = x + D$

Konačno, opće rješenje nehomogene jednadžbe je $y = \frac{(x+D)e^{-x}}{x-1}$

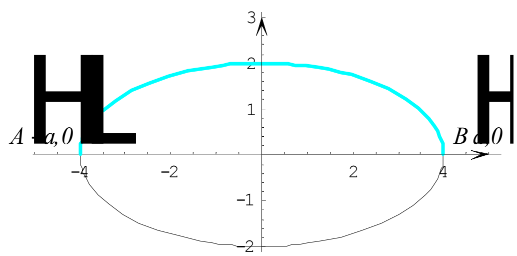
11.3: Izračunati $\int_K (x^2 + 2xy)dy$, gdje je K gornja polovica elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ prijedjena od točke $A(-a,0)$ do $B(a,0)$

Parametarska jednadžba gornjeg luka elipse je
$x = a\,cos\,t\;\;, y = b\,sin\,t\;\;,\;\pi \le t \le 0$

$$\int_K (x^2 + 2xy)dy = \int_\pi^0 \left[a^2 \cos^2 t + 2ab \cos t \sin t\right] b \cos t dt$$

$$= a^2 b \int_\pi^0 cos^3\, tdt + 2ab^2 \int_\pi^0 cos^2\, t\, sin\, tdt$$

$$= a^2 b\left[sin\,x - \frac{1}{3} sin^3\, x\right]\Big|_\pi^0 + 2ab^2\left[-\frac{1}{3}cos^3\, t\right]\Big|_\pi^0 = -\frac{4ab^2}{3}$$



slika 11.1 - zadatak 11.3

Napomena 1: Zadatak možemo riješiti i primjenom Greenove formule. Ako krajeve luka elipse spojimo segmentom AB, dobivamo zatvorenu krivulju.
Uz $P(x, y) = 0$, $Q(x, y) = x^2 + 2xy$, $\vec{a} = (x^2 + 2xy)\vec{j}$, $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j}$ bilo bi

$$\int_K \vec{a} \cdot d\vec{r} = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = 2\iint_D (x + y)dxdy$$

Uvedimo poopćene polarne koordinate : $x = ar\cos t, y = br\sin t$

Granice po novoj domeni su : $r\Big|_0^1$, $t\Big|_\pi^0$ pa je integral jednak

$$2ab\int_\pi^0 \left[\int_0^1 \left(ar^2\, cos\,t + br^2\, sin\,t\right)dr\right]dt = 2ab\int_\pi^0 [(a\,cos\,t + b\,sin\,t)\frac{r^3}{3}\Big|_0^1\,]dt$$

$$= \frac{2ab}{3}(a\,sin\,t - b\,cos\,t)\Big|_\pi^0 = -\frac{4ab^2}{3}$$

Napomena 2: Ovdje treba dodati da je $\int_{AB} (x^2 + 2xy)dy = 0$, stoga ga ne oduzimamo od gore dobivenog rezultata.

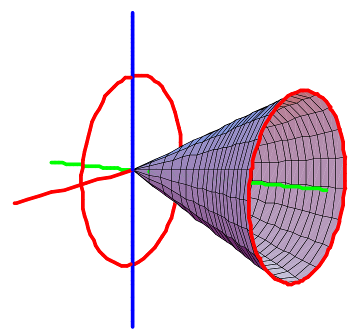
11.4: Izračunati $I = \iint_S (z + 2x + \frac{4}{3}y)dS$ gdje je S dio ravnine $6x + 4y + 3z - 12 = 0$ u prvom oktantu.

Jedinični vektor normale ravnine

$$\vec{n}^0 = \frac{6\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}}{\sqrt{61}} \quad ,\cos\gamma = \frac{3}{\sqrt{61}} \quad ,dS = \frac{dxdy}{|\cos\gamma|} = \frac{\sqrt{61}}{3}dxdy$$

$$I = \iint_S (z + 2x + \frac{4}{3}y)dS = \iint_D \left[4 - 2x - \frac{4}{3}y + 2x + \frac{4}{3}y\right]\frac{\sqrt{61}dxdy}{3} = \frac{4\sqrt{61}}{3}\iint_D dxdy = 4\sqrt{61}$$

11.5: Izračunati tok vektora $\vec{a} = zy\vec{i} - x\vec{j} - y\vec{k}$ kroz vanjsku stranu površine koja omeđuje tijelo $x^2 + z^2 \le y^2$, $0 \le y \le 1$.



slika 11.2 – zadatak 11.5

Primjenimo li teorem o divergenciji, bit će $\iint (\vec{a} \cdot \vec{n}^0)dS = \iiint_V div\vec{a}dV = 0$, jer je $div\vec{a} = 0$.

11.6: Dokazati da je funkcija $w = ze^z$ analitička.

Treba pokazati da funkcija zadovoljava **Cauchy- Riemannove** formule
Stoga zapišimo ponajprije funkciju w u obliku u(x,y)+i v(x,y)

$$\omega = (x + iy)e^x e^{iy} = e^x(x + iy)(\cos y + i\sin y)$$
$$= e^x[(x\cos y - y\sin y) + i(y\cos y + x\sin y)]$$
$$= e^x(x\cos y - y\sin y) + i\, e^x(y\cos y + x\sin y)$$

Prema tome su funkcije

$$u(x,y) = e^x(x\cos y - y\sin y$$
$$v(x,y) = e^x(y\cos y + x\sin y)$$

Provjerimo jednakosti: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ & $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

$$u_x = e^x (x\cos y - y\sin y + \cos y)$$

$$v_y = e^x (\cos y - y\sin y + x\cos y) = e^x (x\cos y - y\sin y + \cos y)$$

$$u_y = e^x (-x\sin y - \sin y - y\cos y) = -e^x (y\cos y + x\sin y + \sin y)$$

$$v_x = e^x (y\cos y + x\sin y + \sin y)$$

Dakle, funkcija je analitička.

pismeni br.12

12.1: Odrediti interval $[a,b]$ na kojem red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sin\, nx}{n^2 + \sqrt{(4-x^2)^n}}$ konvergira apsolutno.

12.2: Bernoullijevom supstitucijom odrediti opće rješenje jednadžbe $(x-1)y' + xy = e^{-x}$.

12.3: Izračunati $\int_K \frac{x^2 dy - y^2 dx}{\sqrt[3]{x^5} + \sqrt[3]{y^5}}$, gdje je K luk astroide $x = a\, cos^3 t, y = a\, sin^3 t$ od točke $A(a,0)$ do $B(0,a)$.

12.4: Izračunati $\iint_S |xyz| dS$, gdje je S dio paraboloida $z = x^2 + y^2$ omeđen ravninom $z = 1$.

12.5: Izračunati $\oint_{C^+} \vec{a} \cdot d\vec{r}$, ako je $\vec{a} = y^2\vec{i} + x^2\vec{j} + z^2\vec{k}$, a C^+ pozitivno orijentirana krivulja koju na koordinatnim ($x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$) ravninama sječe stožac $y = 2 - 2\sqrt{x^2 + z^2}$.

12.6: Odediti analitičku funkciju $f(z) = u(x,y) + i\, v(x,y)$ kojoj je imaginarni dio $v(x,y) = 2xy + 5y - x - \frac{x}{x^2 + y^2}$.

RJEŠENJA:

12.1: Odrediti interval $\left[a,b\right]$ na kojem red $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sin\,nx}{n^2+\sqrt{(4-x^2)^n}}$ konvergira apsolutno.

$$\left|a_n\right|=\left|\frac{sin\,nx}{n^2+\sqrt{(4-x^2)^n}}\right|\le\left|\frac{sin\,nx}{n^2}\right|\le\frac{1}{n^2}(\,jer\ \left|sin\,nx\right|\le 1)\,.$$

Prema Weierstrassovom teoremu red apsolutno konvergira na intervalu $\left[-2,\,2\right]$.

12.2: Bernoullijevom supstitucijom odrediti opće rješenje jednadžbe $(x-1)y'+xy=e^{-x}$.

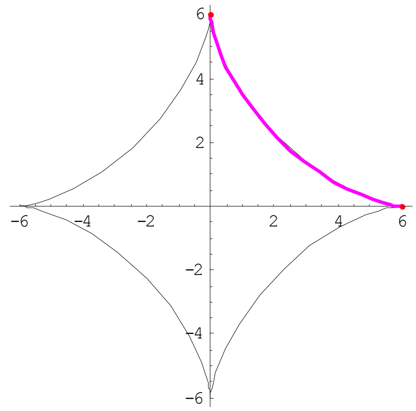
Uvodimo $y=u\cdot v\rightarrow y'=u'v+uv'$ Uvrstimo u jednadžbu $y\ i\ \ y'$ bit će $u'v+u(v'+\frac{x}{x-1}v)=\frac{e^{-x}}{x-1}$. Kako se traže dvije funkcije, a imamo samo jedan uvjet, drugi biramo slobodno. Odredimo stoga funkciju v tako da bude $v'+\frac{x}{x-1}v=0$. Iz ove jednadžbe sa separiranim varijablama odredimo integriranjem traženu funkciju v(x). Izlazi $v=\frac{e^{-x}}{1-x}$ uz napomenu da smo za konstantu integracije odabrali jedinicu. Na taj način od jednadžbe $u'v+u(v'+\frac{x}{x-1}v)=\frac{e^{-x}}{x-1}$ preostaje jednadžba $u'v=\frac{e^{-x}}{x-1}\Leftrightarrow u'\frac{e^{-x}}{1-x}=\frac{e^{-x}}{x-1}\rightarrow u'=-1\rightarrow u=-x-D$, gdje smo konstantu integracije označili kao –D. Uvrstimo dobivene funkcije dobivamo opće rješenje polazne jednadžbe:

$$y=u\cdot v\rightarrow y=\frac{e^{-x}}{1-x}(-x-D)=\frac{e^{-x}(x+D)}{x-1}\,.$$

12.3: Izračunati $\int_K\frac{x^2dy-y^2dx}{\sqrt[3]{x^5}+\sqrt[3]{y^5}}$, gdje je K luk astroide $x=a\,cos^3\,t,y=a\,sin^3\,t$ od točke $A(a,0)\ do\ \ B(0,a)$.

Iz $x=a\,cos^3\,t,y=a\,sin^3\,t\rightarrow dx=-3a\,cos^2\,t\,sin\,tdt\ \ i\ \ \ dy=3a\,sin^2\,t\,cos\,tdt$ to daje $x^2dy-y^2dx=3a^3\,sin^2\,t\,cos^2\,t(cos^5\,t+sn^5t\,)dt$. Slično je i $\sqrt[3]{x^5}+\sqrt[3]{y^5}=a^{\frac{5}{3}}(cos^5\,t+sin^5\,t\,)$. Uvrštavanjem u integral dobivamo

$$3a^{\frac{4}{3}}\int_0^{\pi/2}\sin^2\ t\ \cos^2\ tdt\ \ =3a^{\frac{4}{3}}\left[\frac{t}{8}\ -\ \frac{\sin\ 4t}{32}\right]\Big|_0^{\pi/2}\ \ =\ \ \frac{3a^{4/3}\pi}{16}$$



slika 12.1 – zadatak 12.3

12.4: Izračunati $\iint\limits_S |xyz| dS$, gdje je S dio paraboloida $z = x^2 + y^2$ omeđen ravninom $z = 1$.

Za plohu $z = x^2 + y^2$ je $dS = \sqrt{1 + z_x{}^2 + z_y{}^2} = \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}$, pa je

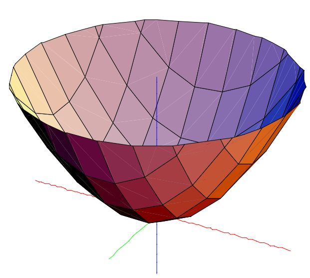
$$\iint\limits_S xy(x^2 + y^2)\sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}dxdy = 4\iint\limits_{Dxy} r^5 \sin\phi \cos\phi \sqrt{1 + 4r^2}\, drd\phi =$$

$$4\int\limits_0^{\pi/2}\left[\sin\phi\cos\phi\int\limits_0^1 r^5\sqrt{1+4r^2}\,dr\right]d\phi = 4\frac{125\sqrt{5}-1}{840}\int\limits_0^{\pi/2}\sin\phi\cos\phi d\phi = \frac{125\sqrt{5}}{420}$$

Pritom je za izračunavanje unutarnjeg integrala $\int\limits_0^1 r^5\sqrt{1+4r^2}\,dr$ uvedena susptitucija

$1 + 4r^2 = w^2$ koja vodi do integrala $\frac{1}{64}\int\limits_1^{\sqrt{5}}\left[w^6 - 2w^4 + w^2\right]dw = \frac{125\sqrt{5}-1}{840}$

slika 12.2 – zadatak 12.4



12.5: Izračunati $\oint\limits_{C^+} \vec{a}\cdot d\vec{r}$, ako je $\vec{a} = y^2\vec{i} + x^2\vec{j} + z^2\vec{k}$, a C^+ pozitivno orijentirana krivulja koju u prvom oktantu odsjeca stožac $y = 2 - 2\sqrt{x^2 + z^2}$.

Integral $\oint\limits_{C^+} \vec{a} \cdot d\vec{r} = \int\limits_{C^+} y^2dx + x^2dy + z^2dz = \int\limits_{C_1} + \int\limits_{C_2} + \int\limits_{C_3}$

Duž krivulje C_1 je $z = 0, dz = 0, y = 2(1-x), dy = -2dx$ pa je integral

$$\int\limits_{C_1}\left[4(1-2x+x^2-2x^2\right]dx = \int\limits_0^1 (4-8x+2x^2)dx = \left[4x-4x^2+\frac{2}{3}x^3\right]\Big|_0^1 = \frac{2}{3}$$

Duž krivulje C_2 je $y = 0, dy = 0, z = \sqrt{1-x^2}, dz = \dfrac{-xdx}{\sqrt{1-x^2}}$ pa je integral

$$\int\limits_{C_2} z^2dz = \int\limits_1^0 (1-x^2)\frac{-xdx}{\sqrt{1-x^2}} = -\int\limits_1^0 x\sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{3}$$

Duž krivulje C_3 je $x = 0, dx = 0, z = 1-\dfrac{y}{2}, dz = -\dfrac{dy}{2}$ i integral

$$\int\limits_{C_3} z^2dz = -\frac{1}{2}\int\limits_0^2 (1-y+\frac{y^2}{4})dy = -\frac{1}{2}\left[y-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{12}\right]\Big|_0^2 = -\frac{1}{3}$$

Ukupno $\int\limits_C = \int\limits_{C_1} + \int\limits_{C_2} + \int\limits_{C_3} = \dfrac{2}{3}$

Napomena :Integral se može računati i pomoću Stokesova poučka.

Pritom je $rot\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y^2 & x^2 & z^2 \end{vmatrix} = 2(x-y)\vec{k}$, $\vec{n}^0 = \dfrac{-2x\vec{i} + \sqrt{x^2+z^2}\,j - 2z\vec{k}}{\sqrt{5}\sqrt{x^2+z^2}}$

$$\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}, dS = \frac{dxdz}{|\cos\beta|} = \sqrt{5}dxdz$$

To daje $\oint\limits_{C^+} \vec{a}\cdot d\vec{r} = \iint\limits_{Dxz} \dfrac{4(y-x)z}{\sqrt{x^2+z^2}}\Big|_{y=2-2\sqrt{x^2+z^2}} dxdz = \iint\limits_{Dxz}\left[\dfrac{8z}{\sqrt{x^2+z^2}} - 8z - \dfrac{4xz}{\sqrt{x^2+z^2}}\right]dxdz$

Posljednji integral rastavimo na tri integrala i uvedemo polarne koordinate bit će :

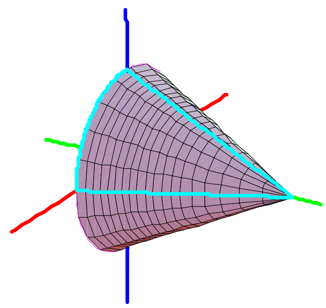
$$I_1 = 8\int\limits_0^{\pi/2}\left[\int\limits_0^1 r\sin\phi dr\right]d\phi = 4$$

$$I_2 = -8\int\limits_0^{\pi/2}\left[\int\limits_0^1 r^2 \sin\phi dr\right]d\phi = -\frac{8}{3}$$

$$I_3 = -4\int\limits_0^{\pi/2}\left[\int\limits_0^1 r^2 \cos\phi\sin\phi dr\right]d\phi = -\frac{2}{3}$$

Ukupno : $I = I_1 + I_2 + I_3 = \dfrac{2}{3}$

slika 12.3 – zadatak 12.5



12.6: Odrediti analitičku funkciju $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ kojoj je imaginarni dio

$$v(x,y) = 2xy + 5y - x - \frac{x}{x^2+y^2}$$

Da bi funkcija bila analitička nužno je i dovoljno da vrijede **Cauchy-Riemannove** jednadžbe tj. da bude: $u_x = v_y$ & $u_y = -v_x$

Imamo:

$$v_y = 2x + 5 + \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = u_x$$

Integriranjem po x dobivamo

$$u = x^2 + 5x + \int \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\,dx + f(y) = x^2 + 5x - \frac{y}{x^2+y^2} + f(y)$$

Potrebno je još odrediti "konstantu" f(y). U tu svrhu koristimo drugu od Cauchy-Riemannovih jednadžbi , prema kojoj je

$$-v_x = 1 - 2y - \frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} = -\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} + f_y'(y)$$

Sljedi da je $f_y'(y) = 1 - 2y \rightarrow f(y) = y - y^2 + C$

Konačno je funkcija $u = u(x,y) = x^2 + 5x - \dfrac{y}{x^2+y^2} + y - y^2 + C$, pa je tražena funkcija jednaka:

$$f(z) = (x^2 - y^2 + 5x + y - \frac{y}{x^2+y^2} + C) + i\ (2xy + 5y - x - \frac{x}{x^2+y^2})$$

pismeni br.13

13.1: Funkciju $f(x)=|cos\,x|$ razviti u Fourierov red i izračunati sumu reda u točki $x=\dfrac{\pi}{2}$.

13.2: Odrediti opće i singularno rješenje diferencijalne jednadžbe $y = xy' + \sqrt{4y'^2+1}$. Nacrtati graf singularnog rješenja.

13.3: Odrediti rješenje diferencijalne jednadžbe $y'' - 8y' + 16y = (1-x)e^{4x}$ koje zadovoljava početni uvjet : $y(0) = y'(0) = 1$.

13.4: Izračunati $\left[\int\limits_{C_1}(x+y)^2\,dx-(x-y)^2\,dy\right]-\left[\int\limits_{C_{21}}(x+y)^2\,dx-(x-y)^2\,dy\right]$, gdje su C_1- spojnica točaka $A(1,1), B(2,6)$ i C_2 -dio luka parabole koji spaja točke $A(1,1), B(2,6)$ i ima vertikalnu os.

13.5: Izračunati cirkulaciju vektora $\vec{a} = y^2\vec{i} + xy\vec{j} + (x^2+y^2)\vec{k}$ duž krivulje $C\ldots\begin{cases} Rz & = & x^2+y^2 \\ z=R, & x=0, & y=0 \end{cases}$ orijentirane u pozitivnom smjeru u odnosu na vanjsku normalu paraboloida : a) izravno ; b) pomoću Stokesova teorema.

13.6: Izračunati tok vektora $\vec{a} = x^2y\vec{i} + xy^2\vec{j} + xyz\vec{k}$ kroz dio sfere u prvom oktantu.

RJEŠENJA

13.1: Funkciju $f(x)=|cos\,x|$ razviti u Fourierov red i izračunati sumu reda u točki $x=\frac{\pi}{2}$.

Funkcija je parna na intervalu $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ pa je $b_n=0$ i treba izračunati

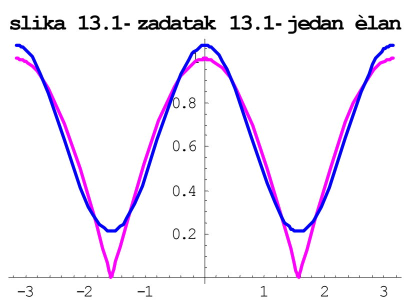
$$a_n=\frac{2}{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\pi/2}\cos x\cos\frac{n\pi x}{\frac{\pi}{2}}dx=\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos x\cos 2nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}[\cos(2n-1)x+\cos(2n+1)x]dx$$

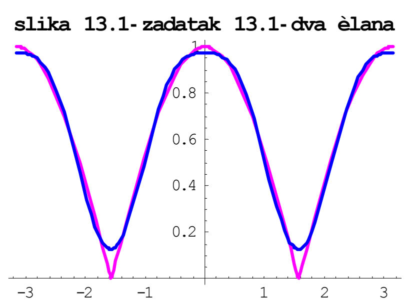
$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin(2n-1)\frac{\pi}{2}}{2n-1}+\frac{\sin(2n+1)\frac{\pi}{2}}{2n+1}\right]=\frac{2}{\pi}\left[\frac{(-1)^n\cdot(-2)}{4n^2-1}\right]=\frac{4}{\pi}\cdot\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1},\ n=0,1,2,...$$

$$a_0=\frac{4}{\pi}$$

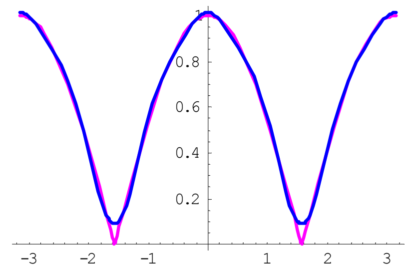
konačno je: $|cos\,x|=\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}cos\,2nx$

Ako uvrstimo $x=\frac{\pi}{2}$ dobivamo $\frac{1}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$

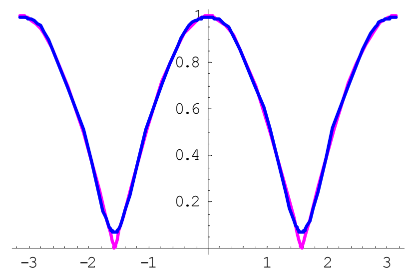




slika 13.1- zadatak 13.1- tri èlana



slika 13.1- zadatak 13.1- èetiri èlana



13.2: Odrediti opće i singularno rješenje diferencijalne jednadžbe $y = xy' + \sqrt{4y'^2 + 1}$.
Nacrtati graf singularnog rješenja.

Uvrstimo $y' = p$ dobivamo $y = xp + \sqrt{4p+1}$. Deriviranjem po x dobivamo

$p = p + x\dfrac{dp}{dx} + \dfrac{8p}{2\sqrt{4p^2+1}}\dfrac{dp}{dx}$ ili sređivanjem

$$\frac{dp}{dx}\left(x + \frac{4p}{\sqrt{4p^2+1}}\right) = 0.$$

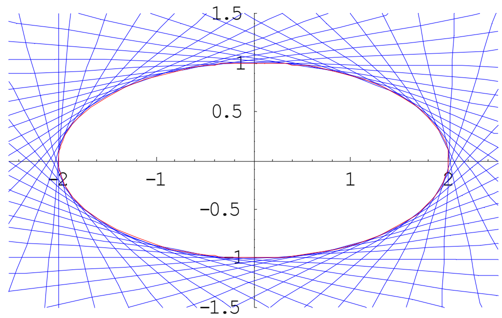
Ako je $\dfrac{dp}{dx} = 0 \rightarrow p = C$ pa je $y = Cx + \sqrt{4C^2+1}$ opće rješenje jednadžbe.

Ako je $x + \dfrac{4p}{\sqrt{4p^2+1}} = 0 \rightarrow x = -\dfrac{4p}{\sqrt{4p^2+1}}$

Eliminacijom parametra p iz sustava

$$\begin{cases} x = \dfrac{-4p}{\sqrt{4p^2+1}} \\ y = xp + \sqrt{4p^2+1} \end{cases}$$ dobivamo $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

Dakle, singularno rješenje predstavlja elipsu.



slika 13.2 – zadatak 13.2

13.3: Odrediti rješenje diferencijalne jednadžbe $y''-8y'+16y=(1-x)e^{4x}$ koje zadovoljava početni uvjet : $y(0)=y'(0)=1$.

Karakteristična jednadžba $r^2-8r+16=0$ ima dvostruki korijen $r_1=r_2=4$ pa su $y_1=e^{4x}, y_2=xe^{4x}$ dva linearno nezavisna rješenja homogene jednadžbe, a $y=C_1e^{4x}+C_2xe^{4x}$ njezino opće rješenje.
Partikularno rješenje nehomogene jednadžbe tražimo u obliku
$\eta=x^2(Ax+B))e^{4x}$
Deriviramo η po x , nakon sređivanja dobivamo :

$$\eta'=e^{4x}\left[4Ax^3+(3A+4B)x^2+2Bx\right]$$
$$\eta''=e^{4x}\left[16Ax^3+(24A+6B)x^2+(6A+16B)x+2B\right]$$

Uvrstimo derivacije od η u nehomogenu jednadžbu nakon sređivanja dobivamo
$e^{4x}\left[6Ax+2B\right]=(1-x)e^{4x}\rightarrow 6Ax+2B=1-x\rightarrow A=-\frac{1}{6}, B=\frac{1}{2}$, ili
$\eta=x^2(-\frac{1}{6}x+\frac{1}{2})e^{4x}$, pa je opće rješenje jednadžbe
$y=C_1e^{4x}+C_2xe^{4x}+x^2(-\frac{1}{6}x+\frac{1}{2})e^{4x}$.
Da odredimo posebno rješenje riješimo sustav

$$\begin{cases} C_1 & = & 1 \\ 4C_1+C_2 & = & 1 \end{cases}\rightarrow C_1=1, C_2=-3.$$

Konačno, posebno je rješenje: $y=e^{4x}(1-3x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6})$.

13.4: Izračunati

$$\left[\int_{C_1} (x+y)^2 dx - (x-y)^2 dy\right] - \left[\int_{C_2} (x+y)^2 dx - (x-y)^2 dy\right],$$ gdje su

C_1-spojnica točaka $A(1,1), B(2,6)$ i C_2-dio luka parabole, koji spaja točke $A(1,1), B(2,6)$. Parabola ima vertikalnu os.

Za izračunavanje $\int_{C_1} (x+y)^2 dx - (x-y)^2 dy$ parametrizirajmo pravac AB:

$\begin{matrix} x = 1+t, dx = dt \\ y = 1+5t, dy = 5dt \end{matrix}$. Točki A pripada parametar $t = 0$, a točki B parametar $t = 1$. Na osnovi toga imamo

$$\int_{C_1} (x+y)^2 dx - (x-y)^2 dy = \int_0^1 \left[(2+6t)^2 - 5(-4t)^2\right]dt = \int_0^1 \left(4+24t-44t^2\right)dt = \frac{4}{3}$$

Na sličan način parametriziramo jednadžbu parabole. Bit će:

$$\begin{matrix} x = t, \ dx = dt \\ y = 2t^2 - t, \ dy = (4t-1)dt \end{matrix}.$$

Točki A pripada parametar $t = 1$, a točki B parametar $t = 2$.

Prema tome:

$$\int_{C_2} (x+y)^2 dx - (x-y)^2 dy = \int_1^2 \left[(2t^2)^2 - (2t-2t^2)^2(4t-1)\right]dt$$

$$= \int_1^2 \left[-16t^5 + 40t^4 - 24t^3 + 4t^2\right]dt = -\frac{2}{3}$$

Konačno je :

$$\left[\int_{C_1} (x+y)^2 dx - (x-y)^2 dy\right] - \left[\int_{C_2} (x+y)^2 dx - (x-y)^2 dy\right] = \frac{4}{3} - \left(-\frac{2}{3}\right) = 2.$$

13.5: Izračunati cirkulaciju vektora $\vec{a} = y^2\vec{i} + xy\vec{j} + (x^2+y^2)\vec{k}$ duž krivulje

$C \ldots \begin{cases} Rz = x^2 + y^2 \\ z = R, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0 \end{cases}$ orijentirane pozitivno u odnosu na vanjsku normalu paraboloida: a) direktno; b) pomoću Stokesova teorema.

a) direktno:

Treba izračunati : $\oint_C \vec{a} \cdot d\vec{r} = \int_C y^2 dx + xydy + (x^2+y^2)dz$

Krivulja C se sastoji od tri krivulje: $C = C_1 + C_2 + C_3$

- $C_1 : y = 0, Rz = x^2 \to dy = 0, dz = \frac{2xdx}{R};$

$$\int_{C_1} = \int_R^0 x^2 \frac{2x}{R} dx = \frac{2}{R} \int_R^0 x^3 dx = -\frac{R^3}{2}$$

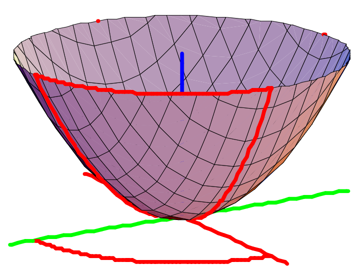
- $C_2 : x = 0, Rz = y^2 \to dx = 0, dz = \frac{2dy}{R};$

$$\int_{C_2} = \int_0^R y^2 \frac{2y}{R} dy = \frac{2}{R} \int_0^R y^3 dy = \frac{R^3}{2}$$

- $C_3 : z = R, y = \sqrt{R^2 - x^2} \to dz = 0, dy = -\frac{xdx}{\sqrt{R^2 - x^2}};\quad \int_{C_3} = \int_0^R (R^2 - 2x)dx = \frac{R^3}{3}$

Konačno imamo:

$$\int_C = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3} = -\frac{R^3}{2} + \frac{R^3}{2} + \frac{R^3}{3} = \frac{R^3}{3}$$



slika 13.3 – zadatak 13.5

b) Pomoću Stokesova teorema:

$\oint_C \vec{a} \cdot d\vec{r} = \iint_S rot\vec{a} \cdot \vec{n}_0 dS$, gdje je C rub plohe S razapete nad krivuljom C.

Izračunajmo:

$$rot\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 & xy & x^2 + y^2 \end{vmatrix} = 2y\vec{i} - 2x\vec{j} - y\vec{k}$$

$$\vec{n}^0 = \frac{grad\left[x^2 + y^2 - Rz\right]}{\left\|grad\left[x^2 + y^2 - Rz\right]\right\|} = \frac{2x\vec{i} + 2y\vec{j} - R\vec{k}}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + R^2}}, dS = \frac{dxdy}{|\cos\gamma|} = \frac{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + R^2}}{R}$$

$$rot\vec{a} \cdot \vec{n}^0 dS = \frac{4xy - 4xy + Ry}{R} dxdy = ydxdy$$

$$\oint_C \vec{a}\cdot d\vec{r} = \iint_S rot\vec{a}\cdot \vec{n}_0 dS = \iint ydxdy = \int_0^{\pi/2}\left[\sin\phi\int_0^R r^2 dr\right]d\phi = \frac{R^3}{3}$$

13.6: Izračunaj tok vektora $\vec{a} = x^2 y\vec{i} + xy^2\vec{j} + xyz\vec{k}$ kroz dio sfere u prvom oktantu.

Zadatak čemo rješiti na dva načina: a) direktno , b) pomoću teorema o divegenciji

a) direktno

Treba izračunati $\iint_\Sigma (\vec{a}\cdot\vec{n}^0)dS$

$$\vec{n}^0 = \frac{gradF}{\|gradF\|} = \frac{2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k}}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4z^2}} = \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{R}, \quad \cos\gamma = \frac{z}{R}$$

$$dS = \frac{dxdy}{|\cos\gamma|} = \frac{R}{z}dxdy$$

$$(\vec{a}\cdot\vec{n}^0)dS = \frac{x^3y + xy^3 + xyz^2}{R}\cdot\frac{R}{z}dxdy$$

$$= \frac{xy(x^2 + y^2 + z^2)}{z}dxdy = \frac{R^2xy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}dxdy$$

$$\iint_\Sigma (\vec{a}\cdot\vec{n}^0)dS = R^2\iint\frac{xydxdy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$$

Uvodimo polarne koordinate : $\begin{matrix} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \end{matrix}$, $dxdy = rdrd\phi$

Granice $r\Big|_0^R$, $\phi\Big|_0^{\pi/2}$

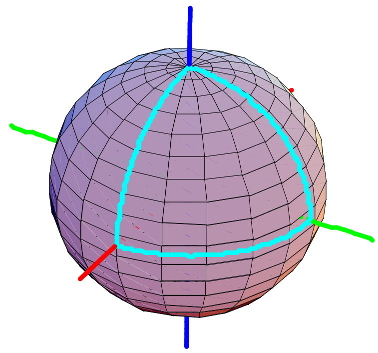
$$\iint_\Sigma (\vec{a}\cdot\vec{n}^0)dS = R^2\iint_D\frac{xydxdy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} = R^2\int_0^{\pi/2}\left[\int_0^R\frac{r^3dr}{\sqrt{R^2 - r^2}}\right]sin\phi\, cos\,\phi d\phi = \frac{R^5}{3}$$

jer je $\int_0^R \frac{r^3dr}{\sqrt{R^2 - r^2}} = \int_0^R (R^2 - w^2)dw = \left[R^2w - \frac{w^3}{3}\right]\Big|_0^R = \frac{2}{3}R^3$

b) pomoću teorema o divergenciji: $\iint_\Sigma (\vec{a}\cdot\vec{n}^0)dS = \iiint_V div\vec{a}dV$

Kako je $div\vec{a} = 5xy$ potrebno je izračunati $\iint_\Sigma (\vec{a}\cdot\vec{n}^0)dS = 5\iiint_V xydV$

Ili $\iint\limits_{\Sigma}(\vec{a}\cdot\vec{n}^0)dS=\iiint\limits_{V}div\vec{a}dV=5\iiint\limits_{V}xydzdydx$



slika13.4 – zadatak 13.6

Uvedimo sferne koordinate: $x=r\sin\theta\cos\phi, y=r\sin\theta\sin\phi, z=r\cos\theta$

Granice: $r\Big|_0^R, \theta\Big|_0^{\pi/2}, \phi\Big|_0^{\pi/2}$

$$\iint\limits_{\Sigma}(\vec{a}\cdot\vec{n}^0)dS=\iiint\limits_{V}div\vec{a}dV=5\iiint\limits_{V}xydzdydx=5\int_0^{\pi/2}\left[\int_0^{\pi/2}\left[\int_0^R r^4\sin^3\theta\sin\phi\cos\phi dr\right]d\theta\right]d\phi$$

$$=R^5\int_0^{\pi/2}\left[\int_0^{\pi/2}\sin^3\theta\sin\phi\cos\phi d\theta\right]d\phi=R^5\int_0^{\pi/2}\sin\phi\cos\phi\left[-\cos\theta+\frac{\cos^3\theta}{3}\right]\Big|_0^{\pi/2}d\phi$$

$$=\frac{2}{3}R^5\int_0^{\pi/2}\sin\phi\cos\phi d\phi=\frac{2}{3}R^5\frac{\sin^2\phi}{2}\Big|_0^{\pi/2}=\frac{R^5}{3}$$

Napomena: Ovdje ne oduzimamo vrijednosti tokova kroz koordinatne ravnine, jer lako se pokaže da su oni jednaki nuli. Naime, teorem o divergenciji primjenjujemo na zatvorenu plohu, a u ovom slučaju to smo ostvarili zatvaranjem pomoću koordinatnih ravnina.

pismeni br.14

14.1: Izračunati $\int_C xyds$, gdje je C luk elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ u prvom kvadrantu.

14.2: Izračunati $\oint_C y(1-x^2)dx + x(1+y^2)dy$, gdje je C luk kružnice $x^2+y^2=a^2$ pozitivno orijentiran

14.3: Odrediti parametre a,b,c tako da vektorsko polje $\vec{a}=(x+2y+az)\vec{i}+(bx-3y-z)\vec{j}+(4x-cy+2z)\vec{k}$ bude polje potencijala .Odrediti potencijal.

14.4: Izračunati tok vektorskog polja $\vec{a}=x\vec{i}-z\vec{j}$ kroz plohu koja se sastoji od dijela paraboloida $x^2+y^2+z-6=0$ i stošca $x^2+y^2-z^2=0$,$(z\geq 0)$ u smjeru vanjske normale.

14.5: Odrediti krivulje u ravnini koje imaju svojstvo da im je površina na intervalu $[1,x]$ jednaka kvocijentu apscise i ordinate krivulje u krajnjoj točki toga intervala.Odrediti onu krivulju koja prolazi točkom $\left(1,\frac{1}{2}\right)$.

14.6: Odrediti posebno rješenje sustava $\begin{cases}\dot{x} & + & 2y & = & 3t\\ \dot{y} & + & 2x & = & 4\end{cases}$ koje zadovoljava početni uvjet $x(0)=2$, $y(0)=3$.

RJEŠENJA

14.1: Izračunati $\int_C xyds$, gdje je C luk elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ u prvom kvadrantu.

Parametrizirajmo jednadžbu elipse sa $x=a\cos t,\quad y=b\sin t,\quad 0\le t\le\frac{\pi}{2}$. Bit će

$$ds=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt=\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\;dt$$

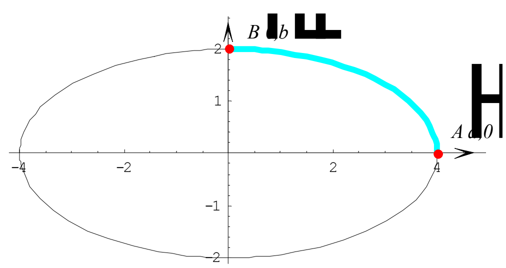
$$\int_C xyds=\int_0^{\pi/2} ab\sin t\cos t\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\;dt$$

Da bismo rješili posljednji integral uvodimo supstituciju

$a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t=u^2\rightarrow ab\sin t\cos tdt=\frac{abu}{a^2-b^2}du$.

Granice : $t=0\rightarrow u=b;\ t=\frac{\pi}{2}\rightarrow u=a$

$$\int_C xyds=\int_0^{\pi/2} ab\,sin\,t\,cos\,t\sqrt{a^2\,sin^2\,t+b^2\,cos^2\,t}\;dt=\frac{ab}{a^2-b^2}\int_b^a u^2du=\frac{ab}{a^2-b^2}\frac{u^3}{3}\Big|_b^a=\frac{ab(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)}$$



slika 14.1 – zadatak 14.1

14.2: Izračunati $\oint_C y(1-x^2)dx+x(1+y^2)dy$, gdje je C luk kružnice $x^2+y^2=a^2$ pozitivno orijentiran

Prvi način.
Parametrizirajmo jednadžbu kružnice:

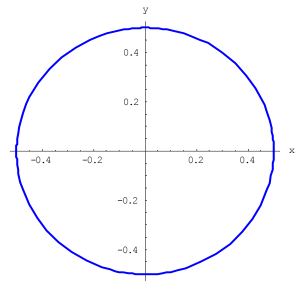
$$x=a\,cos\,t\,,\ y=a\,sin\,t\ ,\ 0\le t\le 2\pi$$

$$dx=-a\,sin\,tdt,\ dy=a\,cos\,tdt$$

Nakon uvrštavanja u integral dobivamo :

$$\oint_C y(1-x^2)dx + x(1+y^2)dy = \int_0^{2\pi}\left[a^2(\cos^2 t - \sin^2 t) + a^4\cos^2 t\sin^2 t\right]dt$$

$$= a^2\int_0^{2\pi}\cos 2tdt + 2a^4\int_0^{2\pi}\cos^2 t\sin^2 tdt = \frac{a^4}{2}\int_0^{2\pi}\sin^2 2tdt = a^4\int_0^{\pi}\sin^2 udu = \frac{a^4\pi}{2}$$



slika14.2 - zadatak 14.2

Drugi način.

Koristimo Greenovu formulu: $\oint_C Pdx + Qdy = \iint_{Dxy}(Q_x - P_y)dxdy$

U našem primjeru su: $P = y(1-x^2)$, $Q = x(1+y^2)$

$P_y = 1 - x^2$, $Q_x = 1 + y^2$

$$\oint_C Pdx + Qdy = \iint_{Dxy}(Q_x - P_y)dxdy = \iint_{Dxy}\left[x^2 + y^2\right]dxdy$$

Uvodimo polarne koordinate $x = r\cos\phi, y = r\sin\phi, dxdy = rdrd\phi$

Granice: $r\Big|_0^a$, $\phi\Big|_0^{2\pi}$

$$\iint_{Dxy}\left[x^2 + y^2\right]dxdy = \int_0^{2\pi}\left[\int_0^a r^3dr\right]d\phi = \frac{a^4\pi}{2}$$

14.3: Odrediti parametre a,b,c tako da vektorsko polje $\vec{a} = (x+2y+az)\vec{i} + (bx-3y-z)\vec{j} + (4x-cy+2z)\vec{k}$ bude polje potencijala. Odrediti potencijal.

Da bi polje bilo potencijalno treba biti $rot\vec{a} = 0$. U našem primjeru je

$$rot\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x+2y+az & bx-3y-z & 4x-cy+2z \end{vmatrix} = (1-c)\vec{i} + (a-4)\vec{j} + (b-2)\vec{k}$$

$rot\vec{a} = 0 \Leftrightarrow a = 4, b = 2, c = 1$

Prema tome je :
$P(x,y,z) = x + 2y + 4z, Q(x,y,z) = 2x - 3y - z, R(x,y,z) = 4x - y + 2z$
i potencijal je:
$$U(x,y,z) = \int_{x_0}^{x} Pdx + \int_{y_0}^{y} Qdy + \int_{z_0}^{z} Rdz = 2xy + 4xz - yz + \frac{x^2}{2} - \frac{3y^2}{2} + z^2 + C$$

14.4: Izračunati tok vektorskog polja $\vec{a} = x\vec{i} - z\vec{j}$ kroz plohu koja se sastoji od dijela paraboloida $x^2 + y^2 + z - 6 = 0$ i stošca $x^2 + y^2 - z^2 = 0$,$(z \geq 0)$ u smjeru vanjske normale.

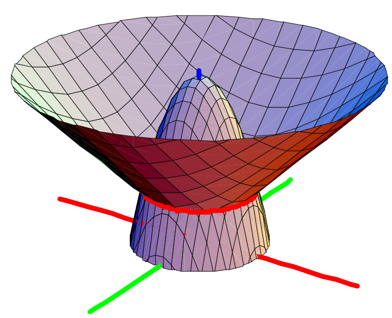
Primjenimo teorem o divergenciji $\oiint_S (\vec{a} \cdot \vec{n}^0) dS = \iiint_V div\vec{a} dV$

Kako je $div\vec{a} = 1$ bit ce $\oiint_S (\vec{a} \cdot \vec{n}^0) dS = \iiint_V div\vec{a} dV = \iiint_V dV$

Uvodimo cilindrične koordinate $x = r\cos\phi, y = r\sin\phi, z = z$

Element volumena $dxdydz = rdzdrd\phi$ .Granice : $z \Big|_{r}^{6-r^2}, \quad r\Big|_0^2, \quad \phi\Big|_0^{2\pi}$

$$\iiint_V dV = \int_0^{2\pi}\left[\int_0^2\left[\int_r^{6-r^2} dz\right]dr\right]d\phi = \frac{32\pi}{3}$$



slika 14.3 – zadatak 14.4

14.5: Odrediti krivulje u ravnini koje imaju svojstvo da im je površina na intervalu $[1,x]$ jednaka kvocijentu apscise i ordinate krivulje u krajnjoj točki toga intervala.Odrediti onu krivulju koja prolazi točkom $\left(1,\frac{1}{2}\right)$.

Prema uvjetima zadatka treba biti $\int_1^x |y| dx = \left|\frac{x}{y}\right|$. Deriviranjem po x dobivamo

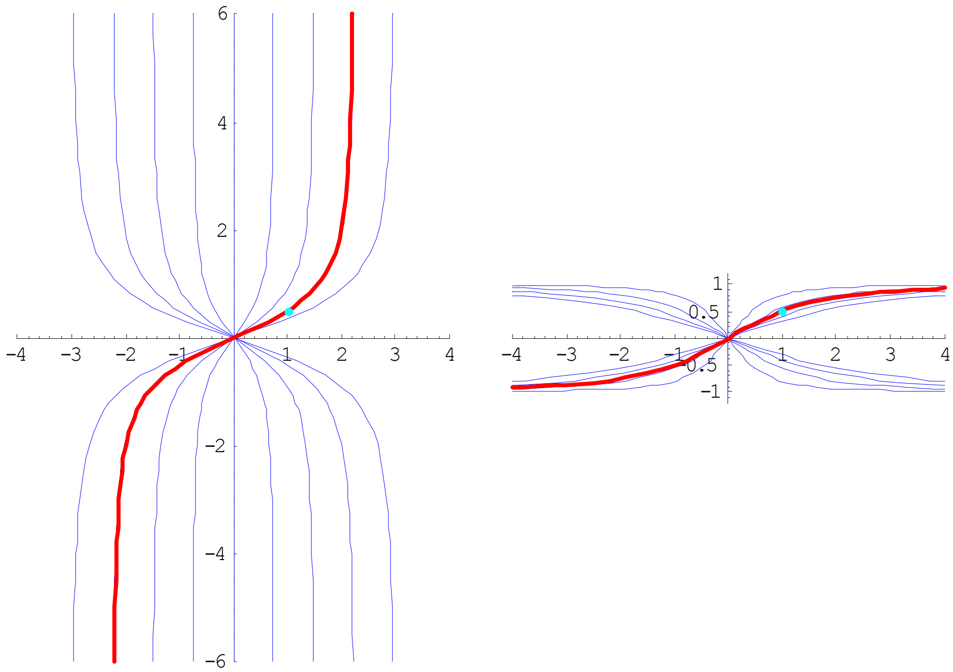
$y = \pm \frac{y - xy'}{y^2} \Leftrightarrow xy' = \pm y(1 - y^2)$. Dobili smo jednadžbe sa separiranim varijablama ili $\frac{dx}{x} = \pm \frac{dy}{y(1 - y^2)}$. Integriranjem dobivamo

$$x = \frac{Cy}{\sqrt{1 - y^2}} \quad ili \quad x = \frac{Cy}{\sqrt{1 + y^2}}$$

Prema tome, opća rješenja su familije krivulja $x = \frac{Cy}{\sqrt{1 - y^2}}$ ili $x = \frac{Cy}{\sqrt{1 + y^2}}$.

Iz početnog uvjeta odredimo vrijednosti konstante C. Dobivamo
$C = \sqrt{3}$ ili $C = \sqrt{5}$, pa su posebna rješenja

$$x = \frac{\sqrt{3}y}{\sqrt{1 - y^2}} \quad ili \quad x = \frac{\sqrt{5}y}{\sqrt{1 + y^2}}.$$



slika 14.4 – zadatak 14.5

14.6: Odrediti posebno rješenje sustava $\begin{cases} \dot{x} + 2y = 3t \\ \dot{y} + 2x = 4 \end{cases}$ koje zadovoljava pocetni uvjet $x(0) = 2$, $y(0) = 3$.

Iz druge jednadžbe je $x = 2 - \frac{\dot{y}}{2} \rightarrow \dot{x} = -\frac{\ddot{y}}{2}$.Uvrstimo $\dot{x}$ u prvu jednadžbu dobivamo dif.jednadžbu drugog reda s konstantnim koeficijentima za traženu funkciju $y = y(t)$:
$\ddot{y} - 4y = -6t$

Karakteristična jednadžba $r^2 - 4 = 0$ pripadne homogene jednadžbe $\ddot{y} - 4y = 0$ ima korijene $r_1 = -2$, $r_2 = 2$. Prema tome su : $y_1 = e^{-2t}$, $y_2 = e^{2t}$ dva linearno nezavisna rješenja homogene jednadžbe i $y = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{2t}$ njezino opće rješenje.

Rješenje nehomogene jednadžbe $\ddot{y} - 4y = -6t$ tražimo u obliku $y = y_0 + \eta$, gdje su: $y_0 = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{2t}$ -opće rješenje homogene jednadžbe, a η - jedno partikularno rješenje nehomogene jednadžbe.

Partikularno rješenje nehomogene jednadžbe tražimo u obliku $\eta = At + B$.
Iz $\eta = At + B \to \dot{\eta} = A$, $\ddot{\eta} = 0$. Uvrstimo $\ddot{\eta}$ i η u jednadžbu $\ddot{y} - 4y = -6t$ i dobivamo: konstante $A = \frac{3}{2}$ i $B = 0$. Konačno, partikularno rješenje $\eta = \frac{3}{2}t$ i opće rješenje

$$y = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{2t} + \frac{3}{2}t .$$

Opće rješenje za drugu traženu funkciju dobivamo iz $x = 2 - \frac{\dot{y}}{2}$.

Kako je $\dot{y} = -2C_1 e^{-2t} + 2C_2 e^{2t} + \frac{3}{2}$ izlazi $x = 2 - \frac{\dot{y}}{2} = C_1 e^{-2t} - C_2 e^{2t} + \frac{5}{4}$

Opće rješenje sustava je $\begin{cases} x = C_1 e^{-2t} - C_2 e^{2t} + \frac{5}{4} \\ y = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{2t} + \frac{3}{2}t \end{cases}$

Posebno rješenje dobivamo uvrštavanjem početnog uvjeta .To vodi do sustava

$\begin{cases} C_1 - C_2 = \frac{3}{4} \\ C_1 + C_2 = 3 \end{cases}$ kojemu je rješenje $(C_1 , C_2) = \left(\frac{15}{8}, \frac{9}{8} \right)$

Konačno posebno rješenje je $\begin{cases} x = \frac{15}{8} e^{-2t} - \frac{9}{8} e^{2t} + \frac{5}{4} \\ y = \frac{15}{8} e^{-2t} + \frac{9}{8} e^{2t} + \frac{3}{2}t \end{cases}$

pismeni br.15

15.1: Odrediti interval konvergencije reda $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{(x-3)^n}{4^n(2n+1)}$ i ispitati ponašanje na krajevima intervala.

15.2: Pokazati da je polje $rot\vec{a}$ polje potencijala , ako je $\vec{a}=-xy^2\vec{i}-yz^2\vec{j}-zx^2\vec{k}$. Odrediti potencijal i izračunati $\int\limits_{(1,2,3)}^{(3,4,5)} rot\vec{a}\cdot d\vec{r}$.

15.3: Odrediti posebno rješenje diferencijalne jednadžbe $y'=\dfrac{x-y}{x+y}$ koje zadovoljava početni uvjet $y(1)=-1$.

15.4: Odrediti partikularno rješenje diferencijalne jednadžbe $y'''-y'=-2x$ koje zadovoljava početni uvjet : $y(0)=0$, $y'(0)=2$, $y''(0)=2$.

15.5: Odrediti cirkulaciju vektora $\vec{a}=(2x+z)\vec{i}+(2y-z)\vec{j}+xyz\vec{k}$ duž krivulje koju paraboloid $x^2 + y^2 + z - 9 = 0$ odsjeca u prvom oktantu ($x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0$).

15.6: Odrediti tok vektora $\vec{a}=x\vec{i}+2y\vec{j}-z\vec{k}$ kroz zatvorenu plohu koju omeđuju $x^2+y^2=z$; $x^2+y^2=z^2$ u smjeru vanjske normale: a) direktno ; b) pomoću teorema o divergenciji.

RJEŠENJA

15.1: Odrediti interval konvergencije reda $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{(x-3)^n}{4^n(2n+1)}$ i ispitati ponašanje na krajevima intervala.

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(x-3)^{n+1}}{4^{n+1}(2n+3)}\cdot\frac{4^n(2n+1)}{(x-3)^n}\right| = \frac{2n+1}{2n+3}\left|\frac{x-3}{4}\right|$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n+3}\left|\frac{x-3}{4}\right| = \left|\frac{x-3}{4}\right| < 1 \Rightarrow |x-3| < 4 \Leftrightarrow -4 < x-3 < 4 \Leftrightarrow -1 < x < 7$$

Interval konvergencije $\langle -1, 7\rangle$

Ako je $x = -1 \to \sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{-1}{2n+1}$, red je divergentan.

Ako je $x = 7 \to \sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$, red konvergira po Leibnizovom kriteriju.

Konačno, interval konvergencije je $<-1, 7]$.

15.2: Pokazati da je polje $rot\vec{a}$ polje potencijala , ako je $\vec{a} = -xy^2\vec{i} - yz^2\vec{j} - zx^2\vec{k}$..Odrediti potencijal i izračunati $\int_{(1,2,3)}^{(3,4,5)} rot\vec{a}\cdot d\vec{r}$.

Odredimo $rot\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -xy^2 & -yz^2 & -zx^2 \end{vmatrix} = 2yz\vec{i} + 2zx\vec{j} + 2xy\vec{k}$

$rot(rot\vec{a}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2yz & 2xz & 2xy \end{vmatrix} = \vec{0}$. Polje $rot\vec{a}$ je polje potencijala.

Tražimo funkciju $U(x,y,z)$ tako da bude $rot\vec{a} = gradU$.

$U(x,y,z) = \int 2yzdx + f(y,z) = 2xyz + f(y,z)$

$\dfrac{\partial U}{\partial y} = 2zx = 2zx + f_y'(y,z) \to f_y'(y,z) = 0 \to f(y,z) = C$

Prema tome, $U(x,y,z) = 2xyz + C$

$$\int_{(1,2,3)}^{(3,4,5)} rot\bar{a}\cdot d\bar{r} = \int_{(1,2,3)}^{(3,4,5)} 2zydx + 2zxdy + 2xydz = \int_{(1,2,3)}^{(3,4,5)} d(2xyz + C) = U(x,y,z)\Big|_{(1,2,3)}^{(3,4,5)} = 108$$

15.3: Odrediti posebno rješenje diferencijalne jednadžbe $y' = \dfrac{x-y}{x+y}$ koje zadovoljava početni uvjet $y(1) = -1$.

Jednadžbu možemo zapisati u obliku $y' = \dfrac{1-\frac{y}{x}}{1+\frac{y}{x}}$. Radi se o homogenoj jednadžbi

Supstitucija $u = \dfrac{y}{x} \to y' = u + xu'$ vodi do jednadžbe sa separiranim varijablama

$u + xu' = \dfrac{1-u}{1+u} \to \dfrac{dx}{x} = \dfrac{(1+u)du}{1-2u-u^2}$. Integriranjem dobivamo

$$\ln|x|^2 = \ln\left|\frac{C}{1-2u-u^2}\right| \to \ln|x|^2 = \ln\left|\frac{Cx^2}{x^2-2xy-y^2}\right| \to x^2 - 2xy - y^2 = C$$

Početni uvjet $y(1) = -1$ daje vrijednost konstante C=2, pa je posebno rješenje $x^2 - 2xy - y^2 = 2$.

15.4: Odrediti partikularno rješenje diferencijalne jednadžbe $y''' - y' = -2x$, koje zadovoljava početni uvjet : $y(0) = 0, y'(0) = 2$, $y''(0) = 2$.

Karakteristična jednadžba $r^3 - r = 0 \to r_1 = 0, r_2 = -1, r_3 = 1$ pa su $y_1 = 1$, $y_2 = e^{-x}$, $y_3 = e^x$ tri linearno nezavisna rješenja homogene jednadžbe, a njihova linearna kombinacija opće rješenje homogene jednadžbe tj. $y = C_1 + C_2e^{-x} + C_3e^x$.

Opće rješenje nehomogene jednadžbe tražimo u obliku $y = y_0 + \eta$, gdje su $y_0 = C_1 + C_2e^{-x} + C_3e^x$ - opće rješenje homogene jednadžbe , a η - posebno rješenje nehomogene jednadžbe koje tražimo u obliku $\eta = x(Ax + B)$ jer je 0 jednostruki korijen karakteristične jednadžbe.

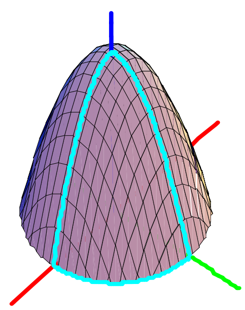
Derivacije od: η su: $\eta' = 2Ax + B, \eta'' = 2A, \eta''' = 0$.
Uvrstimo li η, $\eta' = 2Ax + B$, $\eta'' = 2A$, $\eta''' = 0$ u nehomogenu jednadžbu, dobivamo koeficijente $A = 1, B = 0$. Time je određeno partikularno rješenje $\eta = x^2$.

Konačno, opće rješenje nehomogene jednadžbe je $y = C_1 + C_2e^{-x} + C_3e^x + x^2$.

Početni uvjet vodi do sustava $\begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 &= 0 \\ -C_2 + C_3 &= 2 \\ C_2 + C_3 &= 0 \end{cases}$, kojemu je rješenje uređena trojka $(C_1, C_2, C_3) = (0, -1, 1)$. Posebno rješenje je: $y = -e^{-x} + e^{x} + x^2$.

15.5: Odrediti cirkulaciju vektora $\vec{a} = (2x+z)\vec{i} + (2y-z)\vec{j} + xyz\vec{k}$ duž krivulje koju paraboloid $x^2 + y^2 + z - 9 = 0$ odsjeca u prvom oktantu ($x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$).

slika 15.1-zadatak 15.5



Treba izračunati $\oint\limits_C \vec{a} \cdot d\vec{r}$, gdje se krivulja sastoji od tri po dijelovima glatke krivulje.

Naime, $C = C_1 + C_2 + C_3$ (uzimamo da su krivulje u prvom oktantu).

Krivulja C_1 ima jednadžbu $y = 0, z = 9 - x^2$, iz toga je $dy = 0, dz = -2xdx$ pa je

$$\int\limits_{C_1} \vec{a} \cdot d\vec{r} = \int_0^3 (2x + 9 - x^2)dx = \left[x^2 + 9x - \frac{x^3}{3} \right]\Big|_0^3 = 27$$

Krivulja C_2 ima jednadžbu $z = 0, x^2 + y^2 = 9$, iz toga je $dz = 0, dy = \dfrac{-xdx}{\sqrt{9-x^2}}$ pa je

$$\oint\limits_{C_2} \vec{a} \cdot d\vec{r} = \int_0^3 2xdx + 2ydy = \int_0^3 2xdx + 2\sqrt{9-x^2}\,\frac{x}{\sqrt{9-x^2}}dx = \int_0^3 (2x - 2x)dx = 0$$

Krivulja C_3 ima jednadžbu $x = 0, z = 9 - y^2$, iz toga je $dx = 0, dz = -2ydy$

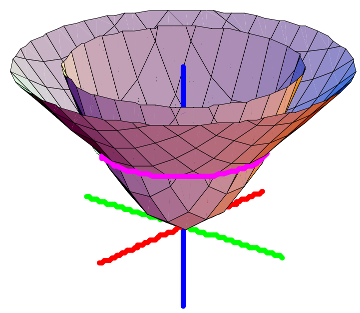
$$\oint\limits_{C_3} \vec{a} \cdot d\vec{r} = \int_3^0 (2y - 9 + y^2)dy = \left[y^2 - 9y + \frac{y^3}{3} \right]\Big|_3^0 = 9$$

Ukupno : $\oint\limits_C \vec{a} \cdot d\vec{r} = \oint\limits_{C_1} \vec{a} \cdot d\vec{r} + \oint\limits_{C_2} \vec{a} \cdot d\vec{r} + \oint\limits_{C_3} \vec{a} \cdot d\vec{r} = 27 + 0 + 9 = 36$

Napomena: Provjerite rezultat Stokesovim poučkom.

15.6: Odrediti tok vektora $\vec{a} = x\vec{i} + 2y\vec{j} - z\vec{k}$ kroz zatvorenu plohu koju omeđuju $x^2 + y^2 = z$; $x^2 + y^2 = z^2$ u smjeru vanjske normale : a) direktno ; b) pomoću teorema o divergenciji.

slika 15.2 – zadatak 15.6



a) direktno

Ploha se sastoji od dvije glatke plohe tok $\Pi = \Pi_1 + \Pi_2$ gdje je Π_1 - tok kroz plohu paraboloida, a Π_2 - tok kroz plohu stošca.

$\Pi_1 = \iint\limits_{S_1} (\vec{a} \cdot \vec{n}_1^{\,0}) dS_1$, gdje je S_1 - dio plohe paraboloida i $\vec{n}_1^{\,0}$ - pripadna normala.

$\Pi_2 = \iint\limits_{S_2} (\vec{a} \cdot \vec{n}_2^{\,0}) dS_2$, gdje je S_2 - dio plohe stosca i $\vec{n}_2^{\,0}$ - pripadna normala.

$$S_1 \equiv x^2 + y^2 - z = 0 \ , \ \vec{n}_1^{\,0} = \frac{gradS_1}{\|gradS_1\|} = \frac{2x\vec{i} + 2y\vec{j} - \vec{k}}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} \ ,$$

$$\cos\gamma = \frac{-1}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}, dS_1 = \frac{dxdy}{|\cos\gamma|} = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}dxdy$$

$$(\vec{a} \cdot \vec{n}_1^{\,0}) dS_1 = \frac{2x^2 + 4y^2 + z}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} \cdot \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}\, dxdy = (3x^2 + 5y^2) dxdy$$

$$\Pi_1 = \iint\limits_{S_1} (\vec{a} \cdot \vec{n}_1^{\,0}) dS_1 = \iint\limits_{S_1} (3x^2 + 5y^2) dxdy$$

Uvodimo polarne koordinate $x = r\cos\phi, y = r\sin\phi, dxdy = rdrd\phi$

Granice : $r\Big|_0^1$, $\phi\Big|_0^{2\pi}$ (jer se plohe sijeku po kružnici $x^2 + y^2 = 1, z = 1$)

$$\Pi_1 = \iint\limits_{S_1} (\vec{a} \cdot \vec{n}_1^{\,0}) dS_1 = \iint\limits_{S_1} (3x^2 + 5y^2) dxdy = \int_0^{2\pi} \left[\left(3\cos^2\phi + 5\sin^2\phi\right) \int_0^1 r^3 dr \right] d\phi$$

$$= \frac{3}{4} \int_0^{2\pi} \cos^2\phi d\phi + \frac{5}{4} \int_0^{2\pi} \sin^2\phi d\phi = 2\pi$$

Na sličan način računamo tok Π_2

$$S_2 \equiv x^2 + y^2 - z^2 = 0 \; , \; \vec{n}_2^{\,0} = \frac{gradS_2}{\|gradS_2\|} = \frac{-2x\vec{i} - 2y\vec{j} + 2z\vec{k}}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4z^2}} = \frac{-x\vec{i} - y\vec{j} + z\vec{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, dS_1 = \frac{dxdy}{|\cos\gamma|} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,dxdy$$

$$(\vec{a} \cdot \vec{n}_2^{\,0})dS_2 = \frac{-x^2 - 2y^2 - z^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{z} dxdy = -\frac{2x^2 + 3y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} dxdy$$

$$\Pi_2 = \iint_{S_2} (\vec{a} \cdot \vec{n}_2^{\,0})dS_2 = -\iint_{S_{22}} \frac{2x^2 + 3y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} dxdy = -\int_0^{2\pi} \left[\left(2\cos^2\phi + 3\sin^2\phi\right) \int r^2 dr \right] d\phi$$

$$= -\int_0^{2\pi} \left[\left(2\cos^2\phi + 3\sin^2\phi\right) \frac{r^3}{3} \Big|_0^1 \right] d\phi = -\frac{1}{3}\int_0^{2\pi} \left[2 + \sin^2\phi\right] d\phi = -\frac{5\pi}{3}$$

Konačno, $\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 = 2\pi - \frac{5\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$.

b) pomoću teorema o divergenciji

Kako je $div\vec{a} = 2$ tok računamo prema formuli $\iint_S (\vec{a} \cdot \vec{n}^{\,0})dS = \iiint_V div\vec{a}dV$.

Ovdje uvodimo cilindrične koordinate.

$$\Pi = \iint_S (\vec{a} \cdot \vec{n}^{\,0})dS = \iiint_V div\vec{a}dV = 2\int_0^{2\pi} \left[\int_0^1 \left[\int_{r^2}^{r} dz \right] rdr \right] d\phi$$

$$= 2\int_0^{2\pi} \left[\int_0^1 \left[r^2 - r^3\right] dr \right] d\phi = 2\int_0^{2\pi} \left[\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4} \right] \Big|_0^1 d\phi = \frac{1}{6}\int_0^{2\pi} d\phi = \frac{\pi}{3}$$