# Zadaci za samostalni rad

# 3.1. - REDOVI

## 3.1.1: Redovi brojeva

- **Odrediti** $s_n$ , $s$ , $r_n$ **za redove :**

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$ (rješenje : $s_n=\frac{1}{3}(1-\frac{1}{3n+1})$ , $s=\frac{1}{3}$ , $r_n=\frac{1}{3(3n+1)}$)

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$ (rješenje: $s_n=1-\frac{1}{(n+1)^2}$ , $s=1$ , $r_n=\frac{1}{(n+1)^2}$ )

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2(n+2)^2}$

   (rješenje : $s_n=\frac{3}{8}-\frac{1}{4}\left[\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}\right]$ , $s=\frac{3}{8}$ , $r_n=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}\right]$ )

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+1)(n+2)}$

   (rješenje: $s_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}$ , $s=\frac{1}{2}$ , $r_n=\frac{1}{(n+1)(n+2)}$ )

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+3)(n+6)}$

   (rješenje:
   $$s_n=\frac{1}{18}\left[\frac{73}{60}-(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+4}-\frac{1}{n+5}-\frac{1}{n+6})\right],\quad s=\frac{73}{1080},$$
   $$r_n=\frac{1}{18}\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+4}-\frac{1}{n+5}-\frac{1}{n+6}\right]$$

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}arctg\frac{1}{2n^2}$ (rješenje: $s_n=arctg\frac{n}{n+1}$ , $s=\frac{\pi}{4}$ , $r_n=arctg\frac{1}{2n+1}$ )

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}arctg\frac{1}{n^2+n+1}$ (rješenje: $s_n=\frac{\pi}{4}-arctg\frac{1}{n+1}$ , $s=\frac{\pi}{4}$ , $r_n=arctg\frac{1}{n+1}$ )

8. $\sum_{n=1}^{\infty} arctg \frac{\sqrt{3}}{2n(2n-1)}$

(rješenje: $s_n = \frac{\pi}{3} - arctg \frac{\sqrt{3}}{1+4n}$ , $s = \frac{\pi}{3}$ , $r_n = arctg \frac{\sqrt{3}}{1+4n}$ )

### 3.1.2. Uspoređivanje redova:

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-2}$ (rješenje: red divergira)

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$ (rješenje: red konvergira )

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n^3-1}$ (rješenje : red konvergira )

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$ ( rješenje : red konvergira )

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{n}$ (rješenje : red divergira )

14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3}{4n^3+5n}$ ( rješenje :red divergira )

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 3^n}$ (rješenje : red konvergira )

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt[3]{n^2}}$ (rješenje : red divergira )

17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)3^n}$ ( rješenje: red konvergira )

18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^5}}$ (rješenje : red konvergira )

### 3.1.3 D'Alembertov kriterij :

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+5}{2^n}$ (rješenje: red konvergira )

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ (rješenje: red divergira )

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3.5.7....(2n+1)}{1.4.7...(3n-2)}$ (rješenje: red konvergira )

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2n+1}}{n!}$ (rješenje: red konvergira )

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{5^n}$ (rješenje : red konvergira )

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{n!}$ (rješenje : red konvergira )

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$ (rješenje : red konvergira )

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n n!}{n^n}$ (rješenje: red divergira )

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$ (rješenje: red divergira )

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n n!}{n^n}$ (rješenje: red divergira )

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n 2^n}$ (rješenje: red divergira )

**3.1.4. Cauchyjev kriterij:**

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{n-1}{2n+1}\right]^n$ (rješenje : red konvergira )

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{n+1}{n}\right]^{n^2}$ (rješenje: red divergira )

3. $\sum_{n=1}^{\infty} n\left[\arcsin\frac{1}{n}\right]^n$ (rješenje : red konvergira )

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left[\frac{n+1}{n}\right]^{n^2}$ (rješenje : red divergira)

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left[1+\frac{1}{n}\right]^{n}$ ( rješenje : red konvergira)

6. $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{n+1}{2n-1}\right]^{n}$ (rješenje: red konvergira)

7. $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2n+1}{3n+1}\right]^{\frac{n}{2}}$ (rješenje: red konvergira)

8. $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{n}{n+2}\right]^{n}$ (rješenje: red divergira )

9. $\sum_{n=1}^{\infty}(1-\frac{1}{n})^{n^2}$ (rješenje: red konvergira )

**3.1.5. Cauchyjev integralni kriterij:**

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$ (rješenje : red konvergira )

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$ (rješenje : red divergira )

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ (rješenje : red divergira )

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln n(\ln\ln n)^2}$ (rješenje: red konvergira )

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln n\ln\ln n}$ (rješenje: red divergira )

6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$ ( rješenje : red konvergira )

7. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+n}{2+n^2}\right)^2$ (rješenje : red konvergira )

8. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+n^2}{1+n^3}\right)^2$ (rješenje : red konvergira )

9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1)}{(n+1)^2}$ (rješenje: red konvergira )

10. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\frac{n+1}{n-1}$ (rješenje: red konvergira )

### 3.1.6. Alternirajući redovi:

Ispitati apsolutnu i uvjetnu konvergenciju

1. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{3n-1}$ (rješenje: uvjetno konvergira )

2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{n\sqrt{n}}$ (rješenje: apsolutno konvergira )

3. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n}{5n-2}$ (rješenje: divergira )

4. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\left[\frac{2n-1}{3n+2}\right]^n$ (rješenje: apsolutno konvergira )

5. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot ...(3n-2)}{3\cdot 5\cdot 7\cdot ....(2n+1)}$ (rješenje: divergira )

6. $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\ln n}{n}$ (rješenje: uvjetno konvergira )

7. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n!}{1\cdot 3\cdot 5\cdot ....\cdot(2n-1)}$ (rješenje: apsolutno konvergira )

8. $\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{n\ln n(\ln n)^2}$ (rješenje: apsolutno konvergira )

9. $\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n\ln n\sqrt{\ln(\ln n)}}$ (rješenje: uvjetno konvergira )

10. $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n-\ln n}$ (rješenje: uvjetno konvergira )

## 3.2. Redovi funkcija

Odrediti interval konvergencije reda funkcija i ispitati ponašanje na krajevima intervala:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1)}{n}x^{n+1}$ (rješenje : $-1 \le x < 1$ )

2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{3^{n-1}n\sqrt{n}}$ (rješenje : $-\sqrt{3} \le x \le \sqrt{3}$ )

3. $\sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})^{n^2}x^n$ (rješenje : $-\frac{1}{e} < x < \frac{1}{e}$ )

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n-2)(x-5)^n}{2^{n+1}(n+1)^2}$ (rješenje : $3 \le x < 7$ )

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^n n}$ (rješenje: $-2 \le x < 2$ )

6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}x^{2n-1}}{(4n-3)^2}$ (rješenje : $-\frac{1}{\sqrt{2}} \le x \le \frac{1}{\sqrt{2}}$ )

7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!x^n}{n^n}$ (rješenje: $-e < x < e$ )

8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n3^n\ln n}$ (rješenje: $-3 \le x \le 3$ )

9. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x-2)^n}{(n+1)\ln(n+1)}$ (rješenje: $1 < x \le 3$ )

10. $\sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})^{n^2}(x-1)^n$ (rješenje: $1-\frac{1}{e} < x < 1+\frac{1}{e}$ )

## 3.3. Fourierovi redovi

### 3.3.1. Razviti funkciju f(x) u Fourierov red na intervalu [a,b]:

**1.** $f(x)=\dfrac{\pi-x}{2}\ ,\ 0<x<2\pi$ (rješenje **:** $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\sin kx}{k}$ **)**

**2.** $f(x)=|x|\ ,\ -1<x<1$ (rješenje **:** $f(x)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{4}{\pi^2}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\cos(\pi(2m-1)x)}{(2m-1)^2}$ **)**

**3.** $f(x)=|\cos x|\ ,\ -\pi<x<\pi$ (rješenje **:** $f(x)=\dfrac{2}{\pi}-\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k+1}\cos 2kx)}{4k^2-1}$ **)**

**4.** $f(x)=|\sin x|\ ,\ -\pi\le x\le\pi$ (rješenje **:** $f(x)=\dfrac{2}{\pi}-\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\cos 2kx}{4k^2-1}$**)**

**5.** $f(x)=x\cos x\ ,\dfrac{-\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$ (rješenje **:** $\dfrac{16}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k+1}\sin 2kx}{(4k^2-1)^2}$**)**

### 3.3.2. Razviti u Fourierov red a) kosinusa ; b) sinusa

**6.** $f(x)=\begin{cases} x & za\quad 0\le x<1 \\ 2-x & za\quad 1\le x<2 \end{cases},$

(rješenje : a) $\dfrac{1}{2}-\dfrac{4}{\pi^2}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\cos(2k-1)\pi x}{(2k-1)^2}$)

(rješenje : b) $\dfrac{8}{\pi^2}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^k\,Sin(2k+1)\pi c}{(2k+1)^2}$)

7. $f(x)=x\sin x\ ,\ 0\le x\le\pi$

(rješenje : a) $1+2\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^k\cos kx}{k^2-1}$ )

(rješenje : b) $\dfrac{\pi}{2}\sin x-\dfrac{16}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{k\sin 2kx}{4k^2-1}$ )

8. $f(x)=x+\dfrac{\pi}{2}\ ,\ 0\le x<\pi$

(rješenje : a) $\pi-\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}$)

(rješenje : b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1-3(-1)^k\sin kx}{k}$)

**9.** $f(x)=\frac{\pi}{2}-x\ ,\ 0<x<\pi$

(rješenje **:** a) $\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}$ **)**

(rješenje **:** b) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{sin\,2kx}{k}$ **)**

**10.** $f(x)=\pi-x\ ,\ 0\le x\le\pi$

(rješenje **:** a) $\frac{\pi}{2}+\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}$ **)**

(rješenje : b) $2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{sin\,kx}{k}$ )

# 4. DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE

## 4.1: Diferencijalne jednadžbe prvog reda

### 4.1.1. Separacija varijabli

1. $(1+y^2)dx=(1+x^2)dy$ (rješenje: $y=\frac{C+x}{1-Cx}$ )

2. $y-xy'=a(1+x^2y')$ (rješenje: $y=a+\frac{Cx}{1+ax}$ )

3. $(y^2+xy^2)y'+x^2-yx^2=0$ (rješenje: $(x+y)(x-y-2)+2\ln\left|\frac{1+x}{1-y}\right|=C$ )

4. $ye^{2x}dx-(1+e^{2x})dy=0$ (rješenje: $y=C\sqrt{1+e^{2x}}$ )

5. $y(1+x^2)y'=1+y^2$ (rješenje: $ln\sqrt{1+y^2}=arctgx+C$ )

6. $y'+\sin\frac{x+y}{2}=\sin\frac{x-y}{2}$ (rješenje: $ln\left|tg\frac{y}{4}\right|=C-2\,sin\frac{x}{2}$ )

Odredi posebno rješenje koje odgovara početnom uvjetu:

7. $y'\sin x=y\ln y$ , $y(\frac{\pi}{2})=e$ (rješenje: $y=1$ , $y=e^{tg\frac{x}{2}}$ )

8. $y'tgx-y=1$ , $y(\frac{\pi}{2})=1$ (rješenje: $y=2\sin x-1$

9. $\sin y\cos xdy=\cos y\sin xdx$ , $y(0)=\frac{\pi}{4}$ (rješenje: $\cos x=\sqrt{2}\cos y$ )

10. $y'=(2y+1)ctgx$ , $y\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$ (rješenje: $y=2\,sin^2x-\frac{1}{2}$ )

### 4.1.2. Homogena diferencijalna jednadžba

1. $ydx + (2\sqrt{xy} - x)dy = 0$ (rješenje: $\sqrt{\frac{x}{y}}+\ln|y|=C$ )

2. $(y+\sqrt{x^2+y^2})dx-xdy=0$ (rješenje: $y=\frac{1}{2C}(x^2-C^2)$ )

3. $y' = \frac{y}{x}\ln\frac{y}{x}$ (rješenje: $y = xe^{1+Cx}$ )

4. $(x^2 + 2xy - y^2)dx + (y^2 + 2xy - x^2)dy = 0$ .Odrediti integralnu krivulju koja prolazi točkom M(1,1). (rješenje: $x^2 + y^2 = x + y$ )

5. $xydy - y^2 dx = (x+y)^2 e^{-\frac{y}{x}} dx$ (rješenje: $(x+y)\ln Cx = xe^{\frac{y}{x}}$ )

6. $xy' = x\sin\frac{y}{x} + y$ (rješenje: $y = 2xarctgCx$ )

7. $x^2 - y^2 - 2xyy' = 0$ (rješenje: $x^2 - 2Cx + y^2 = 0, \textit{familija kruznica}$ )

8. $\frac{dx}{x^2 - xy + y^2} = \frac{dy}{2y^2 - xy}$ (rješenje: $y(y-2x)^3 = C(x-y)^2$ )

9. $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$, odrediti integralnu krivulju koja prolazi točkom (1,1).

(rješenje: $y^2 = x^2(2\ln|x| + 1)$ )

10. $(1 + e^{\frac{x}{y}})dx + e^{\frac{x}{y}}(1 - \frac{x}{y})dy = 0$ .Odrediti integralnu krivulju koja ide točkom M(0,2).

(rješenje: $x + ye^{\frac{x}{y}} = 2$ )

11. $(x - 2y + 5)dx + (2x - y + 4)dy = 0$ (rješenje: $(x + y - 1)^3 = C(x - y - 3)$ )

12.Dokazati da su integralne krivulje jednadžbe $(ax + by + c)dx + (ay - bx + d)dy = 0$ logaritamske spirale.

### 4.1.3. Linearna diferencijalna jednadžba

1. $y' + y = \cos x$ (rješenje: $y = Ce^{-x} + \frac{1}{2}(\cos x + \sin x)$

2. $y' = \frac{y}{2y\ln y + y - x}$ (rješenje: $x = y\ln|y| + \frac{C}{y}$ )

3. $y' = \frac{1}{x\cos y + \sin 2y}$ (rješenje: $x = Ce^{\sin y} - 2\sin y - 2$ )

4. $y' - \frac{2}{x}y = \frac{e^x(x-2)}{x}$ (rješenje: $y = Cx^2 + e^x$ )

5. $(1+y^2)dx=(arctgy-x)dy$ (rješenje: $x=actgy-1+Ce^{-arctgy}$ )

Odrediti posebna rješenja koja zadovoljavaju početne uvjete:

6. $xy'-\dfrac{y}{x+1}=x$ , $y(0)=1$
(rješenje : ne postoji rješenje koje zadovoljava početni uvjet )

7. $y'+x^2y=x^2$ , $y(2)=1$ (rješenje: $y=1$ )

8. $y'-ytgx=\dfrac{1}{\cos x}$ , $y(0)=0$ (rješenje: $y=\dfrac{x}{\cos x}$ )

9. $(1-x^2)y'+xy=1$ , $y(0)=1$ (rješenje: $y=x+\sqrt{1-x^2}$ )

10. $y'+y\cos x=\sin x\cos x$ , $y(0)=1$ (rješenje: $y=2e^{-\sin x}+\sin x-1$ )

### 4.1.4. <u>Bernoullijeva diferencijalna jednadžba</u>

1. $y'+2xy=2x^3y^3$ (rješenje: $\dfrac{1}{y^2}=Ce^{2x^2}+x^2+\dfrac{1}{2}$ )

2. $y'+\dfrac{y}{x+1}+y^2=0$ (rješenje: $y=\dfrac{1}{(1+x)\left[C+\ln|1+x|\right]}$ )

3. $y^{n-1}(ay'+y)=x$ (rješenje: $ny^n=Ce^{-\frac{nx}{a}}+nx-a$ )

4. $xdx=(\dfrac{x^2}{y}-y^3)dy$ (rješenje: $x^2=y^2(C-y^2)$ )

5. $xy'+y=y^2\ln x$ (rješenje: $y(1+\ln|x|+Cx)=1$ )

6. $y'-ytgx+y^2\cos x=0$ (rješenje: $y(x+C)=\dfrac{1}{\cos x}$ )

7. $y'+\dfrac{2y}{x}=\dfrac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}$ (rješenje: $y=\left[\dfrac{C+\ln|\cos x|}{x}+tgx\right]^2$ )

8. $xy'-4y-x^2\sqrt{y}=0$ (rješenje: $y=\dfrac{x^4}{4}\ln^2|Cx|$ )

9. $ydy-\dfrac{ay^2}{x^2}dx=\dfrac{bdx}{x^3}$ (rješenje: $y^2=Ce^{-\frac{2a}{x}}-\dfrac{b}{a}$ )

10. $y' = \frac{yf'(x) - y^2}{f(x)}$, gdje je f(x) proizvoljna diferencijabilna funkcija.

(rješenje: $y = \frac{f(x)}{x+C}$ )

### 4.1.5. Egzaktna diferencijalna jednadžba

1. $(2x^3 - xy^2)dx + (2y^3 - x^2y)dy = 0$ (rješenje: $x^4 - x^2y^2 + y^4 = C$ )
2. $\frac{xdy}{x^2+y^2} - (\frac{y}{x^2+y^2} - 1)dx = 0$ (rješenje: $x + arctg\frac{y}{x} = C$ )
3. $e^y dx + (xe^y - 2y)dy = 0$ (rješenje: $xe^y - y^2 = C$ )
4. $yx^{y-1}dx + x^y \ln x dy = 0$ (rješenje: $x^y = C$ )
5. $\frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{ydx - xdy}{x^2}$ (rješenje: $\sqrt{x^2+y^2} + \frac{y}{x} = C$ )
6. $\left(\frac{y}{\cos^2 xy} + \sin x\right)dx + \left(\frac{x}{\cos^2 xy} + \sin y\right)dy = 0$

   (rješenje: $tgxy - \cos x - \cos y = C$ )
7. $(1 + x\sqrt{x^2+y^2})dx + (-1 + \sqrt{x^2+y^2})ydy = 0$

   (rješenje: $\frac{1}{3}\sqrt{(x^2+y^2)^3} + x - \frac{1}{2}y^2 = C$ )
8. $(\frac{1}{y}\sin\frac{x}{y} - \frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x} + 1)dx + (\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x} - \frac{x}{y^2}\sin\frac{y}{x} + \frac{1}{y^2})dy = 0$

   (rješenje: $\sin\frac{y}{x} - \cos\frac{x}{y} + x - \frac{1}{y} = C$ )
9. $(1 + y^2\sin 2x)dx - 2y\cos^2 xdy = 0$

   (rješenje: $x - y^2\cos^2 x = C$
10. $2x\cos^2 ydx + (2y - x^2\sin 2y)dy = 0.$ Odrediti onu integralnu krivulju koja prolazi ishodištem .

    (rješenje: $2y^2 + x^2\cos 2y + x^2 = 0$

### 4.1.6. Clairautova diferencijalna. jednadžba

1. $y = xy' + \frac{a}{2y'}$ $(a > 0)$ (rješenje: $y = Cx + \frac{a}{2C}, C \neq 0$ , $y^2 = 2ax$ )
2. $2yy' = x(y'^2 + 4)$ (rješenje: $y = Cx^2 + \frac{1}{C}, C \neq 0$ , $y = \pm 2x$ )

3. $y = xy' - y'^2$ (rješenje: $y = Cx - C^2$ , $y = \frac{x^2}{4}$ )

4. $y = xy' + \sqrt{1 - y'^2}$ (rješenje:
$y = Cx + \sqrt{1 - C^2} \neq 0$ , $y^2 - x^2 = 1$, $(y > 0)$ )

5. $y = xy' + \frac{1}{y'}$ (rješenje: $y = Cx + \frac{1}{C}, C \neq 0$ , $y^2 = 4x$ )

6. $y = xy' - a\sqrt{1 + y'^2}$ (rješenje: $y(C - x) = C^2$ , $y = 4x$ )

7. $(xy' + y)^2 = y^2 y'$ (rješenje:
$y = Cx - a\sqrt{1 + C^2} \neq 0$ , $y^2 + x^2 = a^2$ )

8. $y^2 - 2xyy' + (1 + x^2)y'^2 = 1$ (rješenje: $y = Cx \pm \sqrt{1 - C^2}$ , $x^2 - y^2 = 1$ )

9. $y = xy' + y' \ln y'$ (rješenje: $y = Cx + \ln C$ , $y = e^{-(x+1)}$ )

10. $y = xy' + \sqrt{-ay'}$ (rješenje: $y = Cx + \sqrt{-aC} \neq 0$ , $y = \frac{a}{4x}$ )

11. $y = xy' + \sqrt{9y'^2 + 4}$ (rješenje: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ )

12. $y = xy' + \sqrt{a^2 y'^2 + b^2}$ (rješenje: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ )

## 4.2. Diferencijalne jednadžbe drugog i trećeg reda s konstantnim koeficijentima

### 4.2.1 Metoda varijacije konstanti

1. $y'' + y = \frac{1}{\cos x}$ (rješenje: $y = C_1 \cos + C_2 \sin x + x \sin x + \cos x \ln \cos x$ )

2. $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \ln x$ ( rješenje: $y = (C_1 + xC_2 + \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{3x^2}{4})e^{2x}$ )

3. $y'' - y' + 4y = e^{2x} \cos e^x$ (rješenje: $y = C_1 + C_2 e^x - \cos e^x$ )

4. $y'' - 4y' + 5y = \dfrac{e^{2x}}{\cos x}$ (rješenje: $y = \left[C_1 \cos x + C_2 \sin x + \cos x \ln|\cos x| + x \sin x\right] e^{2x}$
)

5. $y'' + y = tg^2 x$ (rješenje: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \sin x \ln tg(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}) - 2$ )

6. $y'' - 2y = 4x^3 e^{x^2}$ 7. (rješenje: $y = C_1 e^{-\sqrt{2}x} + C_2 e^{\sqrt{2}x} + e^{x^2}$ )

7. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{\sqrt{4 - x^2}}$ (rješenje: $y = \left[C_1 + xC_2 + \sqrt{4 - x^2} + x \arcsin\frac{x}{2}\right] e^x$ )

8. $y'' + 4y' + 4y = \dfrac{e^{-2x}}{x^3}$ ( rješenje: $y = (C_1 + xC_2)e^{-2x} + \dfrac{e^{-2x}}{2x}$ )

9. $y'' + 2y' + 2y = \dfrac{1}{e^x \sin x}$
(rješenje: $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} - e^x \ln\sqrt{1 + e^{2x}} + e^{2x} arctg e^x$ )

10. $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{e^{2x}}{e^{2x} + 1}$
(rješenje: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \cos x \ln tg(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}) - 2 \sin x \cos x$ )

### 4.2.2. partikularno rješenje

Odrediti oblik partikularnog rješenja, ako su zadani korijeni karakteristične jednadžbe i funkcija smetnje (desna strana jednadžbe):

1. $r_1 = -1,\ \ r_2 = 1,\ \ f(x) = e^{-x}(ax + b)$ (rješenje: $\eta = x(Ax + B)e^{-x}$ )

2. $r_1 = -1,\ \ r_2 = -1,\ \ f(x) = e^{-x}(ax + b)$ (rješenje: $\eta = x^2(Ax + B)e^{-x}$ )

3. $r_1 = 2i,\ \ r_2 = -2i,\ \ f(x) = e^{-x}(a \sin 2x + b \cos 2x)$
(rješenje: $\eta = x(A \cos 2x + B \sin 2x)$ )

4. $r_1 = -1 - i,\ \ r_2 = -1 + i,\ \ f(x) = e^{-x}(a \sin x + b \cos x)$
(rješenje: $\eta = x(A \sin x + B \cos x)e^{-x}$ )

5. $r_1 = r_2 = r_3 = 0,\ \ f(x) = ax^2 + bx + c$ (rješenje: $\eta = x^3(Ax^2 + Bx + C)$ )

6. $r_1 = i,\ \ r_2 = -i,\ \ r_3 = 1,\ \ f(x) = \sin x + \cos x$
(rješenje: $\eta = x(A \sin x + B \cos x)$ )

7. $r_1 = 3-2i$, $r_2 = 3+2i$, $r_3 = r_4 = 0$, $f(x) = e^{3x}(\sin 2x + \cos 2x)$
(rješenje: $\eta = x(A\cos 2x + B\sin 2x)e^{3x}$ )

8. $r_1 = r_2 = 3-2$ $i$ $r_3 = r_4 = 3+2i$ , $f(x) = e^{3x}(\sin 2x + \cos 2x)$
(rješenje: $\eta = x^2(A\sin 2x + B\cos 2x)e^{3x}$ )

9. $r_1 = -1$, $r_2 = 1$, $r_3 = 2$, $f(x) = ae^{-x} + be^{x}$
(rješenje: $\eta = x(Ae^{-x} + Be^{x})$ )

10. $r_1 = r_2 = r_3 = 1$, $f(x) = ae^{-x} + be^{x}$
(rješenje: $\eta = Ae^{-x} + x^3 Be^{x}$ )

## 4.3. Sustavi linearnih diferencijalnih jednadžbi

Odrediti opće odnosno opće i posebno rješenje ako je:

1. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = 3x + 4y \end{cases}$

(rješenje: $x = C_1e^{t} + C_2e^{5t}$ , $y = -C_1e^{t} + 3C_2e^{5t}$ )

2. $\begin{cases} \dot{x} = -x - 5y \\ \dot{y} = x + y \end{cases}$ (rješenje : $\begin{matrix} x = (2C_2 - C_1)\cos 2t - (2C_1 + C_2)\sin 2t \\ y = C_1\cos 2t + C_2\sin 2t \end{matrix}$ )

3. $\begin{cases} \dot{x} = -3x + 4y - 2z \\ \dot{y} = x + z \\ \dot{z} = 6x - 6y + 5z \end{cases}$

(rješenje: $x = C_1e^{t} + C_3e^{-t}$ , $y = C_1e^{t} + C_2e^{2t}$ , $z = 2C_2e^{2t} - C_3e^{-t}$

4. $\begin{cases} \dot{x} = x - y - z \\ \dot{y} = x + y \\ \dot{z} = 3x + z \end{cases}$

(rješenje: $\begin{matrix} x = e^{t}(2C_2\sin 2t + 2C_3\cos 2t, y = e^{t}(C_1 - C_2\cos 2t + C_3\sin 2t) \\ z = e^{t}(-C_1 - 3C_2\cos 2t + 3C_3\sin 2t) \end{matrix}$

5. $\begin{cases} \dot{x} = 4x - y - z \\ \dot{y} = x + 2y - z \\ \dot{z} = x - y + 2z \end{cases}$

(rješenje : $x=C_1e^{2t}+(C_2+C_3)e^{3t}, y=C_1e^{2t}+C_2e^{3t}, z=C_1e^{2t}+C_3e^{3t}$)

6. $\begin{cases}\dot{x} &= x+2y\\ \dot{y} &= x-5\sin t\end{cases}$ (rješenje: $\begin{array}{l} x=C_1e^{-t}+2C_2e^{2t}-cos\,t+3\,sin\,t,\\ y=-C_1e^{-t}+C_2e^{2t}+2\,cos\,t-sin\,t\end{array}$)

7. $\begin{cases}\dot{x} &= 4x-3y+\sin t\\ \dot{y} &= 2x-y-2\cos t\end{cases}$ (rješenje: $\begin{array}{l} x=C_1e^{t}+3C_2e^{2t}+cos\,t-2\,sin\,t,\\ y=C_1e^{t}+2C_2e^{2t}+2\,cos\,t-2\,sin\,t\end{array}$)

8. $\begin{cases}\dot{x} &= x-y+8t\\ \dot{y} &= 5x-y\end{cases}$

(rješenje: $\begin{array}{l} x=C_1\,cos\,2t-C_2\,sin\,2t+2t+2\\ y=(C_1+2C_2)\,cos\,2t+(2C_1-C_2)\,sin\,2t+10t\end{array}$)

9. $\begin{cases}\dot{x} &= 2x-y\\ \dot{y} &= -x+2y-5e^{t}\sin t\end{cases}$ (rješenje: $\begin{array}{l} x=C_1e^{t}+C_2e^{3t}+e^{t}(2\,cos\,t-sin\,t),\\ y=C_1e^{t}-C_2e^{3t}+e^{t}(3\,cos\,t+sin\,t)\end{array}$)

10. $\begin{cases}\dot{x} &= y+tg^2t-1\\ \dot{y} &= -x+tgt\end{cases}$ (rješenje: $\begin{array}{l} x=C_1\,cos\,t+C_2\,sin\,t+tgt,\\ y=-C_1\,sin\,t+C_2\,cos\,t+2\end{array}$)

11. $\begin{cases}\dot{x} &= x+3y, \quad x(0)=3\\ \dot{y} &= -x+5y, \quad y(0)=1\end{cases}$ (rješenje: $\begin{array}{l} x=3C_1e^{2t}+C_2e^{4t},\ y=C_1e^{2t}+C_2e^{4t}\\ x=3e^{2t},\ y=e^{2t}\end{array}$)

12. $\begin{cases}\dot{x} &= 3x-2y, \quad x(0)=1\\ \dot{y} &= 4x+7y, \quad y(0)=0\end{cases}$

(rješenje: $\begin{array}{l} x=e^{5t}(C_1\,cos\,2t+C_2\,sin\,2t), y=e^{5t}((C_1-C_2)\,sin\,2t-(C_1+C_2)\,cos\,2t\\ x=e^{5t}(cos\,2t-sin\,2t),\ y=2e^{5t}\,sin\,2t\end{array}$)

13. $\begin{cases}\dot{x} &= y+z, \quad x(0)=0\\ \dot{y} &= z+x, \quad y(0)=2\\ \dot{z} &= x+y, \quad z(0)=-1\end{cases}$

(rješenje: $\begin{array}{l} x=C_1e^{2t}+C_2e^{-t}, y=C_1e^{2t}+C_3e^{-t}, z=C_1e^{2t}-(C_2+C_3)e^{-t}\\ x=e^{2t}+e^{-t}, y=e^{2t}+e^{-t}, z=e^{2t}-2e^{-t}\end{array}$)

# 5. – VEKTORSKA ANALIZA

## 5.1. Krivuljni integrali prve i druge vrste

1. Izračunati $\int_C \frac{ds}{x+y}$,gdje je C segment pravca $y = x + 2$ segment pravca od točke $(2,4)$ $do$ $(1,3)$ ( rješenje: $\frac{\sqrt{2}}{2}\ln 2$ )

2. Izračunati $\int_C x^2 ds$, gdje je C gornja polovica kružnice $x^2 + y^2 = a^2$ ( rješenje: $\frac{a^3\pi}{2}$ )

3. Izračunati $\int_C x^2 ds$, gdje je C krivulja $\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t) \\ y = a(\sin t - t\cos t) \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$ . ( rješenje: $\frac{a^2}{3}\left[(1+4\pi^2)^{3/2} - 1\right]$ )

4. Izračunati $\int_C xyds$, gdje je C pravokutnik omeđen pravcima : $x = 0, x = 4, y = 0, y = 2$ ( rješenje: 24 )

5. Izračunati $\int_C xyds$, gdje je C dio elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ u prvom kvadrantu.
(rješenje:. $\frac{ab(a^2 + ab + b^2)}{3(a+b)}$ )

6. Izračunati $\int_C (x-y)ds$, gdje je C kružnica $x^2 + y^2 = 2ax$ . (rješenje:. $2a^2\pi$ )

7. Izračunati $\int_C (x-y)ds$, gdje je C, desna latica lemniskate $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$
( rješenje: $a^2\sqrt{2}$ )

8* Izračunati $\int_C (x^2 + y^2 + z^2)ds$, gdje je C jedan zavoj zavojnice
$x = a\cos t$ , $y = a\sin t$ , $z = bt$ $0 \le t \le 2\pi$ (rješenje:. $2\pi\sqrt{a^2 + b^2}(a^2 + \frac{4b^2\pi^2}{3})$ .)

9*. Izračunati $\int\limits_C \frac{ds}{x^2+y^2+z^2}$, gdje je C jedan zavoj zavojnice

$x = a\cos t$ , $y = a\sin t$ , $z = bt$ $\quad 0 \le t \le 2\pi$ (rješenje:. $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab} arctg \frac{2b\pi}{a}$ .)

10*. Izračunati $\int\limits_C x^2 ds$, gdje je C krivulja $\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = a^2 \\ x+y+z = 0 \end{cases}$. ( rješenje:. $\frac{2a^3\pi}{3}$ .)

11. Izračunati $\int\limits_C (xy-y^2)dx + xdy$, gdje je C luk parabole $y = 2x^2$ od točke $(0,0)$ $do$ $(1,2)$.
( rješenje:. $\frac{31}{30}$ )

12. . Izračunati $\int\limits_C y^2dx + x^2dy$, gdje je C luk gornje polovice elipse $x = a\cos t$ , $y = b\sin t$ pozitivno orijentiran. ( rješenje:. $-\frac{4}{3}ab^2$ )

13 Izračunati $\int\limits_C y^2dx + x^2dy$, gdje je CA rub trokuta s vrhovima : $A(0,0), B(1,0), C(0,1)$.
(rješenje: 0 )

14. Izračunati $\int\limits_C (x^2-y^2)dx + (x^2+y^2)dy$, gdje je C pozitivno orijentirana elipsa $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$. (rješenje: $\pi(a^2-b^2)$ .)

15. Izračunati $\int\limits_C 4x\sin^2 ydx + y\cos^2 2xdy$, gdje je C spojnica točaka $(0,0)$ $i$ $(3,6)$ (rješenje: 18 )

16. Izračunati $\int\limits_{(0,0)}^{(1,1)} 2xydx + x^2dy$ duž krivulja : $a) y = x, b) y = x^2, c) y = x^3, d) y^2 = x$
(rješenje: sva četiri jednaka 1 )

17. Izračunati $\int\limits_C (2a-y)dx + xdy$, gdje je C luk cikloide
$x = a(t-\sin t)$ , $y = a(1-\cos t)$ , $0 \le t \le 2\pi$ , (rješenje: $-2a^2\pi$ )

18. Izračunati $\int\limits_C \frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}$ ,gdje je C kružnica $x = a\cos t$ , $y = a\sin t$ pozitivno orijentirana. (rješenje: $2\pi$ )

19. Izračunati $\int\limits_C \frac{xy(ydx - xdy)}{x^2 + y^2}$ , gdje je C desna latica lemniskate $r^2 = a^2 \cos 2\phi$ pozitivno orijentirana. (rješenje: $0$ )

20. Pokazati da integrali :

a) $\int\limits_{(-2,-1)}^{(3,0)} (x^4 + 4xy^3)dx + (6x^2y^2 - 5y^4)dy$ ,

b) $\int\limits_{(1,\pi)}^{(2,\pi)} (1 - \frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x})dx + (\sin\frac{y}{x} + \frac{y}{x}\cos\frac{y}{x})dy$ ,

ne ovise o putu integracije, pa izračunati njihovu vrijednost. (rješenje: a) $64$ ,b) $\pi + 1$ )

## 5.2. Plošni integral prve i druge vrste

1. .Izračunati $\iint\limits_S U(x,y,z)dS,$ gdje je S ploha paraboloida $z = 2 - (x^2 + y^2)$ iznad ravnine xy ako je : a) $U(x,y,z) = 1$ ; b) $U(x,y,z) = x^2 + y^2$ ; c) $U(x,y,z) = 3z$
(rješenje : $a)\ \frac{13\pi}{3}$ , $b)\ \frac{149\pi}{30}$ , $c)\frac{111\pi}{10}$ )

2. Izračunati površinu dijela sfere $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ što ga odsjeca cilindar $x^2 + y^2 = ax$ .
(rješenje: $S = (\pi - 2)a^2$ )

3. Izračunati koordinate težišta plohe iz zadatka 1
(rješenje: $x_c = y_c = 0 \quad z_c = \frac{\iint\limits_S z\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\,dxdy}{\iint\limits_S \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\,dxdy} = \frac{111}{130}$ , koristi rješenjee a) i c) )

4. Izračunati $\iint\limits_S \vec{A} \cdot \vec{n}^0 dS$ , gdje je S dio ravnine $2x + y + z = 6$ u prvom oktantu,
$\vec{A} = xy\vec{i} - x^2\vec{j} + (x + z)\vec{k} = 6$ ,i $\vec{n}^0$ jedinični vektor normale ravnine.
(rješenje : $I = \frac{27}{4}$ )

5. Izračunati površinu dijela sfere $x^2 + y^2 + (z - a)^2 = a^2$ unutar paraboloida $x^2 + y^2 = z$
(rješenje : $S = 2\pi a$ )

6. Izračunati $\iint\limits_S \sqrt{x^2 + y^2}\,dS$ , gdje je S dio plohe stošca $x^2 + y^2 = z^2$ omeđen ravninama $z = 0$ , $z = 3$ . ( rješenje: $S = 18\sqrt{2}\pi$ )

7. Izračunati površinu dijela paraboloida $2z = x^2 + y^2$ izvan stošca $z = \sqrt{x^2 + y^2}$
   (rješenje: $S = \frac{2}{3}\pi(5\sqrt{5} - 1)$ )

8. Izračunati površinu dijela stošca $z^2 = 3(x^2 + y^2)$ odsječen paraboloidom $z = x^2 + y^2$
   (rješenje : $S = 6\pi$ )

9. Izračunati $I = \iint_S yzdydz + xzdxdz + xydxdy$ gdje je S vanjska strana trokuta koji nastaje presjecanjem ravnine $x + y + z - a = 0$ s koordinatnim ravninama .: a) kao plošni integral prve vrste ;b) kao plošni integral druge vrste. (rješenje: $I = \frac{a^4}{8}$ )

10. Izračunati $I = \iint_S x^2 dydz + y^2 dxdz + z^2 dxdy$ , gdje je S vanjska strana paraboloida $x^2 + y^2 + 2az = a^2$ u prvom oktantu:

    a) kao površinski integral prve vrste
    b) kao površinski integral druge vrste.

    (rješenje: $I = a^4(\frac{4}{15} + \frac{\pi}{48})$)

## 5.3. Cirkulacija i rotor vektora, Stokesov teorem

**5.3.1.** Cirkulacija C vektorskog polja $\bar{a}$ je krivuljni integral duž zatvorene orijentirane krivulje L.

Dakle, po definiciji $C = \oint_L \bar{a} \cdot d\bar{r}$, gdje simbol $\oint_L$ označava integral duž zatvorene i orijentirane krivulje L.
Ako je vektorsko polje $\bar{a}$ dano u koordinatnoj formi
$\bar{a} = P(x,y,z)\bar{i} + Q(x,y,z)\bar{j} + R(x,y,z)\bar{k}$ , tada je cirkulacija vektorskog polja
$C = \oint Pdx + Qdy + Rdz.$ Za pozitivni smjer obilaska uzima se onaj pri kojem područje omeđeno krivuljom ostaje na lijevoj strani prilikom obilaženja krivulje.

<u>5.3.2. Primjer</u>: Izračunati cirkulaciju vektorskog polja $\bar{a} = -y^3\bar{i} + x^3\bar{j}$ duž elipse
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.
Prema definicije bit će : $C = \oint_L \bar{a} \cdot d\bar{r} = \oint_L - y^3dx + x^3dy$

Parametarske jednadžbe elipse $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$ .Sljedi:

$dx = -a \sin tdt$, $dy = b \cos tdt$. Nakon uvrštavanja u integral dobivamo

$$C = ab\int_0^{2\pi}\left[b^2\sin^4 t + a^2\cos^4 t\right]dt = \frac{3}{4}\pi ab(a^2+b^2)$$

jer je :

$$\int_0^{2\pi}\sin^4 tdt = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}(1-\cos 2t)^2dt = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}(1-2\cos 2t+\frac{1+\cos 4t}{2})dt =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\left[\frac{3}{2}-2\cos 2t+\frac{1}{2}\cos 4t\right]dt = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\frac{3}{2}dt = \frac{3}{4}\pi$$

Analogno je i $\int_0^{2\pi}\cos^4 tdt = \frac{3}{4}\pi$ .

5.3.3 Primjer :

Izračunati cirkulaciju vektora $\vec{a} = y\vec{i} - 2z\vec{j} + x\vec{k}$ duž krivulje

$E. \equiv \begin{cases} y = x \\ 2x^2 - y^2 + z^2 = R^2 \end{cases}$, pozitivno orijentirane u odnosu na vektor $\vec{i}$

a) direktno, b) pomoću Stokesova poučka.

a) direktno

Krivulja E ima parametarske jednadžbe

$x = R\cos t$ , $z = R\sin t$ , $y = R\cos t$

$dx = -R\sin tdt$ , $dy = -R\sin tdt$ , $dz = R\cos tdt$

$$\oint_E \vec{a}\cdot d\vec{r} = \oint ydx - 2zdy + xdz = R^2\int_0^{2\pi}\left[-\sin t\cos t + 2\sin^2 t + \cos^2 t\right]dt$$

$$= R^2\left[\frac{\cos^2 t}{2} + 2(\frac{t}{2}-\frac{\sin 2t}{4}) + \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right]\Big|_0^{2\pi} = 3R^2\pi$$

b) pomoću Stokesova poučka

$$\oint_E \vec{a}\cdot d\vec{r} = \iint_\Omega \left(rot\vec{a}\cdot\vec{n}^0\right)dS$$

$$rot\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & -2z & x \end{vmatrix} = 2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$$

$$\vec{n}^0 = \frac{grad[x-y]}{\|grad[x-y]\|} = \frac{\vec{i}-\vec{j}}{\sqrt{2}} \to rot\vec{a}\cdot\vec{n}^0 = \frac{3}{\sqrt{2}} \quad , \quad dS = \frac{dxdz}{|\cos\beta|} = \sqrt{2}dxdz$$

$$\oint_E \vec{a}\cdot d\vec{r} = \iint_\Omega \left(rot\vec{a}\cdot\vec{n}^0\right)dS = \frac{3}{\sqrt{2}}\iint_{D_{xz}}\sqrt{2}dxdz = 3R^2\pi .$$

### 5.3.4. Zadaci : Cirkulacija vektora

1. Izračunati cirkulaciju vektora duž kružnice $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$ negativno orijentirane. (rješenje : $C=2\pi R^2$ )

2. Izračunati cirkulaciju vektora $\vec{a}=z\vec{i}+x\vec{j}+y\vec{k}$ duž kružnice $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2 \\ x+y+z=R \end{cases}$

   (rješenje : $C=\dfrac{2\pi R^2}{\sqrt{3}}$ )

3. Izračunati cirkulaciju vektora $\vec{a}=y\vec{i}-z\vec{j}+y\vec{k}$ duž elipse $\dfrac{x^2+y^2}{2}+z^2=a^2$ , $y=x$ pozitivno orijentirane u odnosu na vektor $\vec{i}$ . (rješenje : $C=2\pi a^2$ )

4. Izračunati rad sile $\vec{F}=2xy\vec{i}+y^2\vec{j}-x^2\vec{k}$ kada se materijalna točka giba duž presjeka hiperboloida $x^2+y^2-2z^2=2a^2$ i ravnine $y=x$ od točke $(a,a,0)$ *do* $(a\sqrt{2},a\sqrt{2},a)$ (rješenje: $W=(2\sqrt{2}-\frac{7}{3})a^2$ )

5. Izračunati cirkulaciju vektora $\vec{a}=z^2\vec{i}+x^2\vec{j}+y^2\vec{k}$ duž kružnice $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2 \\ x+y+z=R \end{cases}$ pozitivno orijentirane u odnosu na vektor $\vec{i}$ .

   (rješenje : $C=\dfrac{4\pi R^3}{3}$ )

6. Izračunati cirkulaciju vektora $\vec{a}=z^3\vec{i}+x^3\vec{j}+y^3\vec{k}$ duž krivulje što je na paraboloidu $2x^2-y^2+z^2=R^2$ sječe ravnina $x+y=0$ orijentirane pozitivno u odnosu na vektor $\vec{i}$ . (rješenje: $C=\dfrac{3\pi R^4}{2}$ )

7. Odrediti cirkulaciju vektora $\vec{a}=y^2\vec{i}+xy\vec{j}+(x^2+y^2)\vec{k}$ duž krivulje u prvom oktantu, što je na paraboloidu $x^2+y^2=Rz$ odsijecaju ravnine $x=0$ , $y=0$ , $z=R$ pozitivno orijentirane u odnosu na vanjsku normalu paraboloida. (rješenje: $C=\dfrac{R^3}{3}$ )

7. Izračunati cirkulaciju vektora $\vec{a} = (xy + x + y)\vec{i} + (xy + x - y)\vec{j}$ duž kružnice $x^2 + y^2 = ax$ negativno orijentirane. (rješenje: $C = \frac{a^3}{8}\pi$ )

8. Izračunati cirkulaciju vektora $\vec{a} = (xz + y)\vec{i} + (yz - x)\vec{j} - (x^2 + y^2)\vec{k}$ duž kružnice $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 3 \end{cases}$ pozitivno orijentiranu u odnosu na vektor $\vec{k}$. (rješenje: $C = -2\pi$ )

9. Izračunati cirkulaciju vektora $\vec{a} = (2x + z)\vec{i} + (2y - z)\vec{j} + xyz\vec{k}$ duž krivulje u prvom oktantu, što je paraboloid $x^2 + y^2 = 1 - z$, odsijeca na koordinatnim ravninama. (rješenje: $C = \frac{R^3}{3}$ )

## 5.4. Tok i divergencija vektora, teorem Gauss-Green-Ostrogradski

5.4.1.Primjer:

Izračunati tok vektora $\vec{a} = xy\vec{i} + x^2 y\,\vec{j} + y^2 z\vec{k}$ kroz vanjsku stranu zatvorene površine $z = 0$ , $z = x^2 + y^2$ , $x^2 + y^2 = 1$ .

Primjenimo Gaussov teorem : U našem primjeru su : $P = xy$ , $Q = x^2 y$ , $R = y^2 z$ pa je divergencija

$$div\vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = y + x^2 + y^2$$

Prema teoremu o divergenciji je $\iint_S (\vec{a} \cdot \vec{n}^0)dS = \iiint_V div\vec{a}dV$ ,pa nam valja izračunati integral : $\iiint_V (y + x^2 + y^2)dzdydx$

Uvedimo cilindrične koordinate : $x = r\cos\phi$ , $y = r\sin\phi$ , $z = z$

Granice integracije bit će :

$$r\Big|_0^1 \quad , \quad \phi\Big|_0^{2\pi} \quad , \quad z\Big|_0^{r^2}$$

$$\iiint_V (y + x^2 + y^2)dzdydx = \int_0^{2\pi}\left[\int_0^1\left[\left(r^2 \sin\phi + r^3\right)\int_0^{r^2} dz\right]dr\right]d\phi$$

$$= \int_0^{2\pi}\left[\int_o^1 (r^4 \sin\phi + r^5)dr\right]d\phi = \int_0^{2\pi}\left(\frac{r^5}{5}\Big|_0^1 \sin\phi + \frac{r^6}{6}\Big|_0^1\right)d\phi = \frac{\pi}{3}$$

5.4.2.Primjer:

Izračunati tok vektora $\vec{a} = x^3\vec{i} + y^3\vec{j} + z^3\vec{k}$ kroz sferu $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$,

a) direktno, b) pomoću terema o divergenciji.

a) direktno:

Ploha ima jednadžbu $\begin{array}{l} F(x,y,z)=x^2+y^2+(z-1)^2-1=0 \\ F_x=2x \ , \ F_y=2y \ , \ F_z=2(z-1) \end{array}$

pa je $\vec{n}^0=\dfrac{gradF}{\|gradF\|}=\pm\dfrac{2x\vec{i}+2y\vec{j}+2(z-1)\vec{k}}{\sqrt{4(x^2+y^2+(z-1)^2}}=\pm(x\vec{i}+y\,\vec{j}+(z-1)\vec{k})$

Predznak normale je "+" na gornjoj polusferi,a "–" na donjoj polusferi.

$$\cos\gamma=|z-1|=\begin{cases} z-1 & za \quad \gamma<\dfrac{\pi}{2} \\ -(z-1) & za \quad \gamma>\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Element površine $dS=\dfrac{dxdy}{|\cos\gamma|}=\dfrac{dxdy}{|z-1|}$

$$(\vec{a}\cdot\vec{n}^0)dS=\left[\frac{x^4+y^4}{|z-1|}\pm z^3\right]dxdy$$

Nadalje je tok $\Pi=\Pi_1+\Pi_2$ ,gdje je $\Pi_1$ - tok kroz gornju ,a $\Pi_2$ - tok kroz gornju polusferu

$$\Pi_1=\iint\limits_{D_{xy}}\left[\frac{x^4+y^4}{\sqrt{1-(x^2+y^2)}}+(1+\sqrt{1-(x^2+y^2)})^3\right]dxdy$$

$$\Pi_2=\iint\limits_{D_{xy}}\left[\frac{x^4+y^4}{\sqrt{1-(x^2+y^2)}}-(1-\sqrt{1-(x^2+y^2)})^3\right]dxdy$$

Nakon sređivanja dobivamo :

$$\Pi=2\iint\frac{x^4+y^4}{\sqrt{1-(x^2+y^2)}}dxdy+8\iint\sqrt{1-(x^2+y^2)}dxdy-2\iint(x^2+y^2)\sqrt{1-(x^2+y^2)}dxdy$$

Uvedimo polarne koordinate

$$x=r\cos\phi\ ,\ y=r\sin\phi,\ \ dxdy=rdrd\phi \ \ ,\ \ r\Big|_0^1 \ \ ,\ \ \phi\Big|_0^{2\pi}$$

Svedimo računanje toka na tri integrala :

$$I_1=2\iint\limits_{D_{xy}}\frac{r^5}{\sqrt{1-r^2}}(\cos^4\phi-\sin^4\phi)drd\phi$$

$$=2\int_0^{2\pi}\left[(\cos^4\phi-\sin^4\phi)\int_0^1\frac{r^5}{\sqrt{1-r^2}}dr\right]d\phi=\frac{16}{15}\int_0^{2\pi}(\cos^4\phi-\sin^4\phi)d\phi$$

$$=\frac{8\pi}{5}$$

$$I_2=8\iint\limits_{D_{xy}}r\sqrt{1-r^2}\,drd\phi=8\int_0^{2\pi}\left[\int_0^1 r\sqrt{1-r^2}\,dr\right]d\phi=\frac{16\pi}{3}$$

$$I_3 = -2\iint_{D_{xy}} r^3\sqrt{1-r^2}\,drd\phi = -2\int_0^{2\pi}\left[\int_0^1 r^3\sqrt{1-r^2}\,dr\right]d\phi = -\frac{8\pi}{15}$$

Konačno je : $\Pi = \frac{8\pi}{5} + \frac{16\pi}{3} - \frac{8\pi}{15} = \frac{32\pi}{5}$

b) pomoću teorema o divergenciji

$$\iint_S (\vec{a}\cdot\vec{n}^0)dS = \iiint_V div\vec{a}dV$$

Uvodimo sferne koordinate $x = r\sin\theta\cos\phi$ , $y = r\sin\theta\sin\phi$ , $x = r\cos\theta$

Granice : $r\Big|_0^{2\cos\theta}$ , $\phi\Big|_0^{2\pi}$ , $\theta\Big|_0^{\pi/2}$

$$div\vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 3(x^2+y^2+z^2)$$

$$\Pi = 3\iiint_V \left[x^2+y^2+z^2\right]dxdydz = 3\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\pi/2}\left[\int_0^{2cos\theta} r^4\, sin\,\theta dr\right]d\theta\right]d\phi$$

$$= 3\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\pi/2}\left[\frac{r^5}{5}\Big|_0^{2cos\theta} sin\,\theta\right]d\theta\right]d\phi = \frac{96}{5}\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\pi/2} cos^5\,\theta\, sin\,\theta d\theta\right]d\phi = \frac{32\pi}{5}$$

### 5.4.3. Zadaci: Tok vektora

1. Izračunati tok vektora $\vec{a} = x^2\vec{i} + y^2 j + z\vec{k}$ kroz plohu $\sqrt{x^2+y^2} \le z \le 1$ u smjeru vanjske normale. (rješenje: $\Pi = \frac{\pi}{3}$ )

2. Izračunati tok vektora $\vec{a} = x^2\vec{i} + y^2 j + z^2\vec{k}$ kroz plohu $x^2+y^2 = z$ , $z \le 1$ u smjeru vanjske normale. (rješenje: $\Pi = \frac{\pi}{3}$ )

3. Izračunati tok vektora $\vec{a} = x^2\vec{i} - y^2 j + z^2\vec{k}$ kroz dio sfere $x^2+y^2+z^2 = R^2,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0$ u smjeru vanjske normale. (rješenje: $\Pi = \frac{\pi R^4}{8}$)

4. Izračunati tok vektora $\vec{a} = 2x^2\vec{i} + 3y^2 j + z^2\vec{k}$ kroz ukupnu površinu tijela $\sqrt{x^2+y^2} \le z \le \sqrt{2R^2-x^2-y^2}$ u smjeru vanjske normale. (rješenje: $\Pi = \pi R^4$ )

5. Izračunati tok vektora $\vec{a} = x^2\vec{i} + y^2 j + z\vec{k}$ kroz dio plohe $z = \frac{H}{R^2}(x^2 - y^2)$ odsiječen cilindrom $x^2 + y^2 = R^2$ orijentiranom u skladu s jediničnim vetorom $\vec{k}$ . (rješenje: $\Pi = 0$ )

6. Izračunati tok vektora $\vec{a} = x^3\vec{i} + y^3 j - z^3\vec{k}$ kroz plohu kocke ,$0 \le x \le a$ , $0 \le y \le a$ , $0 \le z \le a$ u smjeru vanjske normale. (rješenje: $\Pi = a^5$ )

7. Izračunati tok vektora $\vec{a} = 2x\vec{i} + yj - z\vec{k}$ kroz dio paraboloida $y^2 + z^2 = Rx$ odsiječen ravninom $x = R$ orijentiranom u skladu s vektorom $-\vec{i}$ . (rješenje: $\Pi = -\pi R^3$ )

8. Izračunati tok vektora $\vec{a} = xy\vec{i} + yzj + xz\vec{k}$ kroz dio sfere $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ u prvom oktantu u smjeru vanjske normale. (rješenje: $\Pi = \frac{3\pi}{16}$ )

9. Izračunati tok vektora $\vec{a} = x^2 y\vec{i} + xy^2 j + xyz\vec{k}$ kroz sferu $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ u smjeru vanjske normale. (rješenje: $\Pi = \frac{R^5}{3}$ )

10. Izračunati tok vektora $\vec{a} = x^3\vec{i} + y^3 j + z^3\vec{k}$ kroz sferu $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ u smjeru vanjske normale. (rješenje: $\Pi = \frac{32\pi}{5}$ )

## 5.5. Greenova formula

1. Izračunati $\oint_C 3xydx + 2xydy$, gdje je C pravokutnik omeđen pravcima: $x = -2, x = 4, y = 1, y = 2$ (rješenje: 0 )

2. Izračunati $\oint_C (x^2 - y^2)dx + xdy$, gdje je C kružnica $x^2 + y^2 = a^2$ (rješenje: $a\pi$ )

3. Izračunati $\oint_C x\cos ydx - y\sin xdy$, gdje je C kvadrat s vrhovima: $(0,0),(0,\frac{\pi}{2}),(\frac{\pi}{2},0),(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$. (rješenje: $-\frac{\pi^2}{4}$ )

4. Izračunati $\oint_C ytg^2 xdx + tgxdy$ , gdje je C kružnica $x^2 + (y+1)^2 = 1$. ( rješenje: $\pi$ )

5. Izračunati $\oint_C (x^2 - y^2)dx + xdy$, gdje je C kružnica $x^2 + y^2 = 4$. (rješenje: $4\pi$ )

6. Izračunati $\oint_C (e^x + y^2)dx + (e^y + x^2)dy$, gdje je C rub područja omeđenog krivuljama: $y = x^2$, $y = x$. (rješenje: $\frac{1}{30}$ )

7. Izračunati $\oint_C (xy + x + y)dx + (xy + x - y)dy$, gdje je C kružnica $x^2 + y^2 = ax$ pozitivno orijentirana. (rješenje: $-\frac{a^3\pi}{8}$.)

8. Izračunati $\oint_C (x+y)^2 dx - (x^2 + y^2)dy$, gdje je C rub trokuta s vrhovima $A(1,1), B(3,2), C(2,5)$. (rješenje: $-\frac{140}{3}$.)

9. Izračunati $\oint_C (x^3 - x^2 y)dx + xy^2 dy$, gdje je C rub područja omeđen kružnicama $x^2 + y^2 = 4$ & $x^2 + y^2 = 16$. (rješenje: $120\pi$.)

10. Neka je C bilo koja zatvorena krivulja koja omeđuje područje površine S.
    a) Dokazati, ako su $a_1, a_2, a_3$ $i$ $b_1, b_2, b_3$ konstante, tada vrijedi
    $$\oint (a_1 x + a_2 y + a_3)dx + (b_1 x + b_2 y + b_3)dy = (b_1 - a_2)S.$$
    b) Pod kojim uvjetima je krivuljni integral duž bilo koje krivulje jednak nuli
    (rješenje: b) $a_2 = b_1$.)

## 5.6. Potencijal i integriranje u polju potencijala

Pokazati da je polje vektora $\vec{a}$ polje potencijala i odrediti potencijal $P \equiv P(x, y, z)$ ako je :

1. $\vec{a} = 2xyz\vec{i} + x^2 z\vec{j} + x^2 y\vec{k}$ (rješenje: $P \equiv x^2 yz + C$ )

2. $\vec{a} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$ (rješenje: $P \equiv xyz + C$ )

3. $\vec{a} = (yz + 1)\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$ (rješenje: $P \equiv x + xyz + C$ )

4. $\vec{a} = (2xy + z)\vec{i} + (x^2 - 2y)\vec{j} + x\vec{k}$ (rješenje: $P \equiv x^2 y - y^2 + xz + C$ )

5. $\vec{a} = \frac{\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}}{x + y + z}$ (rješenje: $P \equiv \ln|x + y + z| + C$ )

6. $\vec{a} = \dfrac{yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}}{1 + x^2 y^2 z}$ (rješenje: $P \equiv arctg(xyz) + C$ )

7. $\vec{a} = e^x \sin y\vec{i} + e^x \cos y\vec{j} + \vec{k}$ (rješenje: $P = e^x \sin y + z + C$

8. $\vec{a} = (2xy + z^2)\vec{i} + (2yz + x^2)\vec{j} + (2xz + y^2)\vec{k}$

(rješenje: $P \equiv xz^2 + yx^2 + zy^2 + C$ )

9. $\vec{a} = x^2 yz\vec{i} + xy^2 z\vec{j} + xyz^2\vec{k}$ (rješenje: $P \equiv xyz(x + y + z) + C$

10. Pokazati da je polje $\vec{F} = (2xy + z^3)\vec{i} + x^2\vec{j} + 3xz^2\vec{k}$ polje sila . Izračunati potencijal. Izračunati rad što ga napravi tijelo gibajući u tom polju od točke $(1,-2,1)$ do točke $(3,1,4)$

(rješenje: $P \equiv x^2 y + xz^3 + C$ , $W = \int_{(1,-2,1)}^{(3,1,4)} \vec{F} d\vec{r} = \int_{(1,-2,1)}^{(3,1,4)} dP = P \Big|_{(1,-2,1)}^{(3,1,4)} = 202$