1. ELEMENTI LOGIKE I TEORIJE SKUPOVA

IZJAVE, VEZNICI, KVANTIFIKATORI

Nekoliko riječi o matematičkoj logici. Upotrebljavat ćemo pojmove matematičke logike ali se nećemo njom samom previše baviti.
Ponekad se matematička logika naziva-simboličkom. Simbolički račun je tehnika kojom jasno možemo i hoćemo zapisivati definicije, tvrdnje i dokaze.
Osim toga, taj simbolički račun-logika je i sama sebi svrha: bez logičkog mišljenja nema ne samo ispravnog matematičkog nego niti bilo kojeg drugog **zaključivanja.**

Potrebni pojmovi: izjave, veznici, kvantifikatori

Izjava (sud)

- osnovni pojam matematičke logike
- nije svaka smislena rečenica izjava
- nas zanimaju smislene rečenice kojima se našto izjavljuje ili tvrdi

Definicija. Izjave (sudovi) su rečenice za koje se može utvrditi iskazuje li se njima istina ili laž.

Primjeri rečenica:

Moje računalo ima 128 MB RAM-a.
Broj dvanaest je veći od broja deset.
Imam tri ruke.
U ovoj prostoriji ima 200 studenata.
U ovoj prostoriji ima između 80 i 120 studenata.
Gladna sam.

Obrazložite zbog čega neke od navedenih rečenica ne smatramo izjavama.

Elementarne izjave
Jednostavne izjave kojima uvijek možemo utvrditi istinitost. Pomoću **logičkih operacija (veznika)** gradimo složenije izjave.
Izjave (bilo elementarne ili složene) označavat ćemo slovima $A, B, C, \ldots$, itd.

Veznici:

$\neg$ - **negacija**
- ako je izjava A istinita, onda je izjava $\neg A$ lažna i obrnuto
- čitaj: "non A" ili "nije A"

& ($\wedge$) - **konjunkcija**
- ako su A i B izjave, onda je $A \,\&\, B$ ili $A \wedge B$ nova, složena izjava
- izjava $A \,\&\, B$ će biti istinita ako su A i B istinite izjave
- čitaj: "A i B"

$\vee$ - **disjunkcija**
- ako su A i B izjave, onda je $A \vee B$ nova, složena izjava koja će biti istinita ako je barem jedna od početnih izjava istinita
- čitaj "*A* ili *B*"

$\Rightarrow$ - **implikacija**
- složena izjava $A \Rightarrow B$ će biti lažna samo u slučaju da iz istine slijedi laž, tj. ako je *A* istinita, a *B* lažna izjava
- čitaj "*A* implicira *B*" ili "iz *A* slijedi *B*" ili "ako je *A,* onda je *B*" ili "*A* je dovoljan uvjet za *B*" ili "*B* je nužan uvjet za *A*"

$\Leftrightarrow$ - **ekvivalencija**
- izjava $A \Leftrightarrow B$ je istinita ako su obje izjave ili istinite ili lažne
- čitaj "*A* je ekvivalentno *B*" ili "*A* je nužan i dovoljan uvjet za *B*" ili "*A* je onda i samo onda, ako je *B*"

Primjeri složenih izjava!

Kvantifikatori:

Neka je $P(x)$ izjava koja se odnosi na x.

$\forall$ - **svaki** $(\forall\, x)\ P(x)$ čitaj: "za svaki x vrijedi izjava $P(x)$" ili "za svaki x je $P(x)$"

$\exists$ - **postoji** $(\exists\, x)\ P(x)$ čitaj: "postoji x za koji vrijedi $P(x)$"

$\exists!$ - **postoji jedan jedini** $(\exists!\, x)\ P(x)$ čitaj: "postoji jedan jedini x za koji je $P(x)$"

Upotrebljavat ćemo i njihove kombinacije:

$\forall \ldots \exists \ldots$ - "za svaki…postoji…"

$\exists \ldots \forall \ldots$ - "postoji…za svaki…"

SKUPOVI

Pojam skupa se ne definira, već se opisuje.

Primjeri skupova:

Skup slika na izložbi.
Skup studenata u predavaonici.
Skup parnih prirodnih brojeva.
Skup rješenja jednadžbe $x^2 + 5x + 6 = 0$.
Skup istostranih trokuta ravnine.

Oznake:

A, B, C, …, itd. – skupovi
a, b, c, …, itd. – elementi skupa

Relacije među skupovima

"Biti element"

- oznaka: $\in$
- zapis $a \in A$ čitamo "*a* je element skupa *A*"
- negaciju zapisujemo $a \notin A$ i čitamo "*a* nije element skupa *A*"

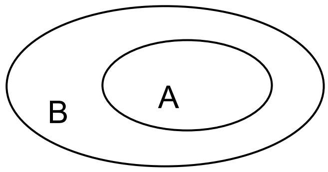
Jednakost skupova

- skupovi *A* i *B* su jednaki ako sadrže iste elemente
- jednakost skupova zapisujemo $A = B$
- simbolički zapis: $(A = B) \Leftrightarrow ((\forall x)\ (x \in A \Leftrightarrow x \in B))$
- ako dva skupa nisu jednaka zapisujemo $A \neq B$

Podskup

- oznaka: $\subset$
- skup *A* je podskup skupa *B* ako je svaki element skupa *A* ujedno i element skupa *B*
- zapis $A \subset B$ čitamo "*A* je podskup od *B*" ili "*A* je sadržan u *B*"
- simbolički zapis: $(A \subset B) \Leftrightarrow ((\forall x)\ (x \in A \Rightarrow x \in B))$
- zapis $A \subseteq B$ se koristi ako se želi istaći mogućnost jednakosti skupova *A* i *B*
- svojstva relacije $\subset$, odnosno $\subseteq$:

1. $A \subseteq A$
2. $(A \subseteq B\ \&\ B \subseteq C) \Rightarrow (A \subseteq C)$
3. $(A = B) \Leftrightarrow (A \subseteq B\ \&\ B \subseteq A)$

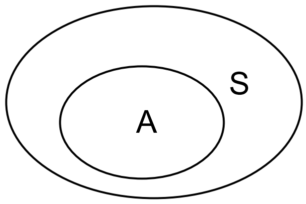


Zadavanje podskupova

Neka je *S* neki skup, a *P*(*x*) nako svojstvo elemenata toga skupa. Svi elementi iz *S* koji imaju svojstvo *P*(*x*) tvore jedan podskup skupa *S*. Takav podskup označavamo sa

$$A = \{ x \in S \mid P(x)\},$$

i čitamo: "*A* je skup svih *x* iz *S* koji imaju svojstvo *P*(*x*)"
(Za više informacija vidi [1].)



Prazan skup

- oznaka: $\emptyset$
- skup koji nema niti jedan element
- podskup je svakog skupa

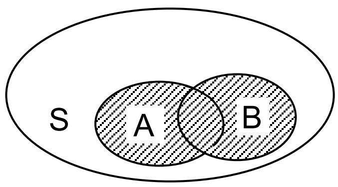
Primjeri!

Operacije sa skupovima

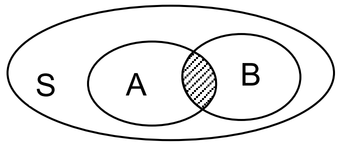
Neka je zadan skup *S* i neka su *A* i *B* njegovi podskupovi.
Definiramo operacije

$\cup$ - **unija skupova:**

$A \cup B = \{ x \in S \mid x$ je sadržan ili u A ili u $B \}$, ili simbolički



$A \cup B = \{\, x \in S \mid x \in A \ \vee \ x \in B \,\}$



$\cap$ - **presjek skupova**:

$A \cap B = \{\, x \in S \mid x$ je sadržan i u A i u $B \,\}$, ili simbolički

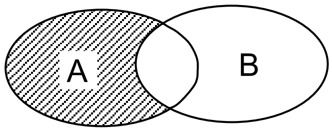
$A \cap B = \{\, x \in S \mid x \in A \ \& \ x \in B \,\}$

Ako je $A \cap B = \emptyset$ (prazan skup), kažemo da su skupovi A i B **disjunktni.**

$\setminus$ - **razlika skupova:**

$A \setminus B = \{\, x \in S \mid x$ je sadržan u A i nije u $B \,\}$, ili simbolički

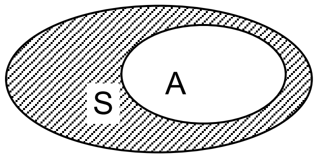
$A \setminus B = \{\, x \in S \mid x \in A \ \& \ x \notin B \,\}$



c - **komplement skupa:**

c(A) $= \{x \in S \mid x$ nije sadržan u skupu $A \,\}$, ili simbolički

c(A) $= \{x \in S \mid x \notin A \,\}$



$\times$ - **Kartezijev produkt skupova**

Kao prvo definiramo pojam **uređenog para:** Neka su a i b zadani elementi. Novi element (a,b) zovemo **uređenim parom**. Element a nazivamo prvim članom para ili prvom koordinatom, dok element b nazivamo drugim članom para ili drugom koordinatom. Vrijedi:

$$(a,b) = (c,d) \Leftrightarrow (a = c \ \& \ b = d)$$

Kartezijev produkt $A \times B$ je skup svih uređenih parova, gdje je prvi član iz skupa A, a drugi iz skupa B, tj.

$$A \times B = \{\, (x,y) : x \in A \ \& \ y \in B \,\}$$

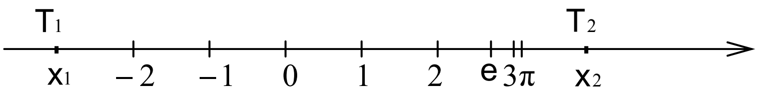
Primjeri!

Skupovi brojeva

Rekli smo da skup ne definiramo, već opisujemo.
Rekli smo i što je podskup nekog skupa.

<u>Skup realnih brojeva</u> – R

Elemente skupa R prikazujemo točkama orijentiranog pravca.



Podskupovi skupa realnih brojeva:

<u>Skup prirodnih brojeva</u> - $N = \{1,2,3,\ldots,n,\ldots\} \subset Z \subset Q \subset R$

Prirodni se brojevi dobivaju rješavanjem jednadžbi $a + x = b$.
Ako je $a < b$ rješenje je iz skupa N.
Ako je $a \geq b$, onda rješenje nije iz skupa prirodnih brojeva, tj.
$a + x = b \;\Rightarrow\; x = b - a \;\leq 0 \;\notin N$
Promatramo proširenje skupa N:

Skup cijelih brojeva - $Z = \{\ldots, -n, -(n-1), \ldots, -1, 0, 1, \ldots, n-1, n, \ldots\} \subset Q \subset R$

Cijeli se brojevi dobivaju rješavanjem jednadžbi $ax = b$.
Ako je a|b (a je djeljitelj od b) rješenje je iz skupa Z.
Ako $\neg$ (a|b), onda rješenje nije iz skupa cijelih brojeva, tj.
$ax = b \Rightarrow x = b/a \;\notin Z$
Promatramo proširenje skupa Z:

Skup racionalnih brojeva - $Q = \{\, m/n \mid m \in Z, n \in N \,\} \subset R$

Skup iracionalnih brojeva - $I \subset R$

Iracionalni brojevi imaju prikaz u obliku beskonačnog neperiodičnog decimalnog broja.
Vrijedi: $Q \cup I = R$, $Q \cap I = \emptyset$, $I = R \setminus Q$.

ZAKLJUČIVANJE

Definicije, aksiomi, teoremi

Definicija = rečenica kojom uvodimo neki novi pojam, nije ni istinita niti lažna
Aksiom = tvrdnja (izjava) koju prihvaćamo kao istinitu, ne dokazujemo je
Teorem = tvrdnja (izjava) koja se dokazuje

Metode zaključivanja

Za dokazivanje ili provjeru nekih tvrdnji koristit ćemo tri metode zaključivanja:

1. **Modus ponens** ("pravilo otkidanja")
2. **Zaključivanje po kontrapoziciji**
3. **Matematička indukcija**

Modus ponens ("pravilo otkidanja")

Neka su x i y dvije izjave.
Simbolički zapis pravila otkidanja: $(x \,\&\, (x \Rightarrow y)) \Rightarrow y$
Čitamo: "Ako je x istina (istinita izjava) i $x \Rightarrow y$ istina, onda je i y istina"

Primjer: x: kiša pada
$x \Rightarrow y$: kiša pada $\Rightarrow$ ulice su mokre

y: ulice su mokre
Možemo li iz y zaključiti o x?

Zaključivanje po kontrapoziciji

Neka su x i y dvije izjave.
Simbolički zapis zaključivanja po kontrapoziciji: $(x \Rightarrow y) \Leftrightarrow (\neg y \Rightarrow \neg x)$
Čitamo: "Tvrdnja da iz x slijedi y ekvivalentna je tvrnji da iz $\neg y$ slijedi $\neg x$"

Primjer!

Matematička indukcija

U matematici se koristi deduktivna i induktivna metoda zaključivanja.
Deduktivna metoda zaključivanja – od općeg prema pojedinačnom.
Induktivna metoda zaključivanja – od pojedinačnog prema općem.

Princip induktivne metode zaključivanja, tj. matematičke indukcije:
Neka je N skup prirodnih brojeva. Označimo sa $T(n)$ neku tvrdnju o prirodnim brojevima.
Pitamo se da li je ta tvrdnja istinita za svaki prirodni broj.

Postupak:

1. Ispitujemo da li je tvrdnja istinita za $n = 1$
2. Pretpostavimo istinitost tvrnje za bilo koji n, i koristeći se tom pretpostavkom ispitujemo da li je ispunjena za $n + 1$

Ako je 1. i 2. ispunjeno, zaključujemo da je

3. Tvrdnja je istinita za svaki prirodni broj

Simbolički zapis:

1. $T(1)$
2. $T(n) \Rightarrow T(n+1)$

Ako je 1. i 2. ispunjeno, zaključujemo da je

3. $(\forall n \in N)\ T(n)$

ili

$$(\ T(1)\ \&\ (T(n) \Rightarrow T(n+1))\ ) \Rightarrow (\forall n \in N)\ T(n)$$

Napomenimo da matematičku indukciju koristimo i u slučaju provjere valjanosti neke tvrdnje $T(n)$ za svaki prirodni broj $n \geq k,\ k \in N$. Simbolički je zapis u tom slučaju sljedeći:

1. $T(k)$
2. $T(n) \Rightarrow T(n+1)$

Ako je 1. i 2. ispunjeno, zaključujemo da je

3. $(\forall n \in N, n \geq k)\ T(n)$

ili

$$(T(k)\ \&\ (T(n) \Rightarrow T(n+1))\ ) \Rightarrow (\forall n \in N, n \geq k)\ T(n)$$

Primjer:

Matematičkom indukcijom dokazati da za $\forall a \in N \;\&\; \forall n \in N$ vrijedi:

$$\frac{1}{a(a+1)}+\frac{1}{(a+1)(a+2)}+...+\frac{1}{(a+n-1)(a+n)}=\frac{n}{a(a+n)}.$$

Rješenje:

a) Baza indukcije:

$$n=1 \;\Rightarrow\; \frac{1}{a(a+1)}=\frac{1}{a(a+1)}$$

b) Korak indukcije: $n=k \;\Rightarrow\; n=k+1$

Pretpostavimo da tvrdnja vrjedi za $n=k$, tj.

$$\frac{1}{a(a+1)}+\frac{1}{(a+1)(a+2)}+...+\frac{1}{(a+k-1)(a+k)}=\frac{k}{a(a+k)}$$

Dokažimo da vrijedi za $n=k+1$:

$$\frac{1}{a(a+1)}+\frac{1}{(a+1)(a+2)}+...+\frac{1}{(a+k-1)(a+k)}+\frac{1}{(a+k)(a+k+1)}=\frac{k+1}{a(a+k+1)}$$

$$\frac{k}{a(a+k)}+\frac{1}{(a+k)(a+k+1)}=$$

$$\frac{k(a+k+1)+a}{a(a+k+1)(a+k)}=$$

$$\frac{ak+k^2+k+a}{a(a+k+1)(a+k)}=$$

$$\frac{(a+k)(k+1)}{a(a+k+1)(a+k)}=\frac{k+1}{a(a+k+1)}$$

Dakle, jednakost je ispunjena za $\forall a \in N \;\&\; \forall n \in N$.□