2. REALNI BROJEVI

SKUP REALNIH BROJEVA KAO POTPUNO UREĐENO POLJE

Struktura
Struktura je skup na kojem je definirana bar jedna računska operacija.
Primjeri struktura: $(N, +)$, $(Q, +)$, $(Q, \bullet)$, $(Q, +, \cdot\bullet)$,…itd.

Naka je R skup realnih brojeva. Na skupu R su definirane operacije *zbrajanja* (+) i *množenja* (•), te uređaj *manje ili jednako* (≤), tj. $(R, +, \bullet)$.

$(R, +, \bullet)$ čini *polje* realnih brojeva. Polje je struktura s određenim svojstvima. Ta su svojstva dana putem 9 aksioma. Osim toga postoji 5 aksioma koji definiraju uređaj i posljednji, petnaesti aksiom koji opisuje *neprekidnost* skupa R.

Aksiomi polja realnih brojeva

Zbrajanje je funkcija $+ : R \times R \longrightarrow R$, tj. $(x, y) \longrightarrow x + y \in R$
Množenje je funkcija $\bullet : R \times R \longrightarrow R$, tj. $(x, y) \longrightarrow x \bullet y = x\,y \in R$

Neka su $x, y, z \in R$. Tada vrijedi:

A-1) $(x + y) + z = x + (y + z)$ *asocijativnost*
A-2) $x + 0 = 0 + x = x$ *postojanje neutralnog elementa*
A-3) $x + (-x) = (-x) + x = 0$ *postojanje suprotnog elementa*
A-4) $x + y = y + x$ *komutativnost*

Strukturu $(R, +)$ sa svojstvima A-1) do A-4) nazivamo *komutativnom grupom.*

A-5) $(x\,y)\,z = x\,(y\,z)$ *asocijativnost*
A-6) $x\,1 = x$ *postojanje neutralnog elementa*
A-7) $x \neq 0, \exists\, x^{-1}, x\,x^{-1} = 1$ *postojanje inverznog elementa*
A-8) $x\,y = y\,x$ *komutativnost*

Strukturu $(R, \bullet)$ sa svojstvima A-5) do A-8) nazivamo *komutativnom grupom.*

A-9) $x(y+z) = x\,y + x\,z$ *distributivnost množenja prema zbrajanju*

Strukturu $(R, +, \bullet)$ sa svojstvima A-1) do A-9) nazivamo **polje.**

Aksiomi uređaja ≤

Neka su $x, y, z \in R$. Tada vrijedi:

A-10) $(x = y)$ ili $(x \leq y)$ ili $(y \leq x)$
A-11) ako je $(x \leq y)$ i $(y \leq x)$, onda je $(x = y)$
A-12) ako je $(x \leq y)$ i $(y \leq z)$, onda je $(x \leq z)$
A-13) ako je $(x \leq y)$, tada za svaki realni broj z vrijedi $(x + z \leq y + z)$
A-14) ako je $(0 \leq x)$ i $(0 \leq y)$, onda je $(0 \leq xy)$

Strukturu $(R, +, \bullet)$ sa svojstvima A-1) do A-14) nazivamo **uređeno polje**

Napomena: Operacije oduzimanja i dijeljenja izvode se iz zbrajanja i množenja.

$$x - y := x + (-y)$$

$$\frac{x}{y} := x\,y^{-1}$$

Oznaku **:=** čitaj "po definiciji".

Osnovna svojstva (teoremi) uređenog polja

Svojstva računskih operacija

1) $\forall a \in R,\ a \cdot 0 = 0$
2) $ab = 0 \iff (a = 0 \lor b = 0)$
3) $a \neq 0 \Rightarrow a^{-1} \neq 0$
4) $-(-a) = a$
5) $a(-b) = -ab,\ (-a)(-b) = ab$
6) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{c} = \frac{ac}{bc}$
7) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$
8) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$

Ova svojstva (teoremi) se mogu dokazati, što ćemo za neka i napraviti na predavanju, služeći se aksiomima polja i činjenicom da jednadžbe

1. $a + x = b$, i
2. $ax = b$

imaju jednoznačna rješenja u polju realnih brojeva (dokaz vidi u [1]).

Svojstva relacije uređaja

1) $a < 0 \Rightarrow -a > 0$
2) $a < 0\ \&\ b < 0 \Rightarrow ab > 0$
3) $a < 0\ \&\ b > 0 \Rightarrow ab < 0$
4) $1 > 0,\ -1 < 0$
5) Za prirodne brojeve vrijedi $1 < 2 < \ldots < n < n + 1 < \ldots$

6) $a \leq b \Rightarrow -a \geq -b$
7) $a > b \Rightarrow a - b > 0$
8) $(a < b \ \& \ c < d) \Rightarrow a + c < b + d$
9) $a_1 \leq b_1,\ a_2 \leq b_2, \ldots,\ a_n \leq b_n \Rightarrow a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leq b_1 + b_2 + \ldots + b_n$
10) $a > 0 \Rightarrow a^{-1} > 0$
11) $(a > b \ \& \ c > 0) \Rightarrow ac > bc$, $(a > b \ \& \ c < 0) \Rightarrow ac < bc$
12) $(0 \leq a_1 \leq b_1 \ \& \ 0 \leq a_2 \leq b_2) \Rightarrow 0 \leq a_1\, a_2 \leq a_2\, b_2$
13) $a_1 < a_2 \Rightarrow a_1^2 < a_2^2 \ \& \ a_1^n < a_2^n$

Služeći se aksiomima uređaja, dokazat ćemo na predavanju neka od ovih svojstava.

Neki jednostavni skupovi na brojevnom pravcu

Intervali – "jednostavni" podskupovi realnih brojeva

$(a, b) = \{x \in R \mid a < x < b\}$	*otvoreni interval*
$[a, b] = \{x \in R \mid a \leq x \leq b\}$	*zatvoreni interval*
$(a, b] = \{x \in R \mid a < x \leq b\}$	*poluotvoreni* (*poluzatvoreni*) *interval*
$[a, b) = \{x \in R \mid a \leq x < b\}$	*poluotvoreni* (*poluzatvoreni*) *interval*

Intervali s beskonačnim granicama:

$(a, \infty) = \{x \in R \mid a < x\}$
$[a, \infty) = \{x \in R \mid a \leq x\}$
$(-\infty, b) = \{x \in R \mid x < b\}$
$(-\infty, b] = \{x \in R \mid x \leq b\}$
$(-\infty, \infty) = \{x \in R \mid -\infty < x < \infty\} = R$

Ograničeni podskupovi

Definicije:

- Za podskup $S \subset R$ kažemo da je **ograničen odozgo** ako postoji realan broj M takav da je $x \leq M$, za sve $x \in S$. Takav broj zove se **gornja ograda** skupa S.

- Za podskup $S \subset R$ kažemo da je **ograničen odozdo** ako postoji realan broj m takav da je $m \leq x$, za sve $x \in S$. Takav broj zove se **donja ograda** skupa S.

- Skup S je **ograničen** ako je ograničen odozdo i odozgo.

- Skup je **neograničen** ako nema ili gornju ili donju ogradu.

Primjeri!

Iz gornje definicija slijedi da, ako je skup ograničen odozgo brojem M, ograničen je i svakim brojem većim od M, tj. ima beskonačno mnogo gornjih ograda. Najmanja gornja ograda skupa S zove se **supremum** i označava sa $\sup S$.
Ako je $\sup S \in S$ kažemo da je to **maksimalni** ili najveći element skupa S.

Analogno, ako je skup ograničen odozdo brojem *m*, ograničen je i svakim brojem manjim od *m*, tj. ima beskonačno mnogo donjih ograda. Najveća donja ograda skupa *S* zove se **infimum** i označava sa inf*S*.
Ako je $\inf S \in S$ kažemo da je to **minimalni** ili najmanji element skupa *S*.
Sada možemo izreći posljednji, petnaesti aksiom realnih brojeva kojim opisujemo **neprekidnost** skupa *R*.

A-15) Ako je *S* neprazan, odozgo ograničen podskup realnih brojeva, onda *S* ima supremum u *R*.

Aksiomu A-15) ekvivalentnu tvrdnju iskazuje sljedeći teorem:

Teorem Odozdo ograničen skup ima infimum.

Dokaz. Vidi [1, str.29].

Primjeri!

APSOLUTNA VRIJEDNOST REALNIH BROJEVA

Definicija i osnovna svojstva
Definicija. Apsolutna vrijednost realnog broja je funkcija $|\ |: R \to R^+$, definirana sa

$$\begin{cases} |x| = x, & x \geq 0 \\ |x| = -x, & x < 0 \end{cases}.$$

Iz definicije slijedi:

$$\left.\begin{array}{l} |x|^2 = x^2 \\ |x|^2 = (-x)^2 \end{array}\right\} \Rightarrow |x| = \sqrt{x^2} = \sqrt{(-x)^2}$$

Svojstva (pravila) apsolutne vrijednosti

Neka su $a, b \in R$. Vrijedi:

1. $|-a| = |a|$
2. $a = |a|$
3. $-|a| \leq a \leq |a|$
4. $|a| \leq b \Leftrightarrow -b \leq a \leq b$
5. $|ab| = |a| \cdot |b|$, $\left|a^2\right| = |a|^2$

6. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}, \quad b \neq 0$
7. $|a+b| \leq |a| + |b|$ *nejednakost trokuta*
8. $\big||a| - |b|\big| \leq |a-b|$

Dokaz. Na predavanju.

U sljedećim zadacima odrediti skup rješenja:

1. $|x-5| < 1$
2. $\left|\frac{x-3}{x+2}\right| < 4$
3. $|x^2 - 6x + 5| \geq \frac{7}{4}$
4. $\left|x + \frac{1}{x}\right| \geq 1$
5. $|x-1| < 10^{-1}$
6. $|cos\, x| \leq 1$
7. Prikazati grafički skup točaka ravnine koji je zadan jednadžbom $x \cdot |x| + y \cdot |y| = 1$.

Ad 1)

1. <u>način</u>

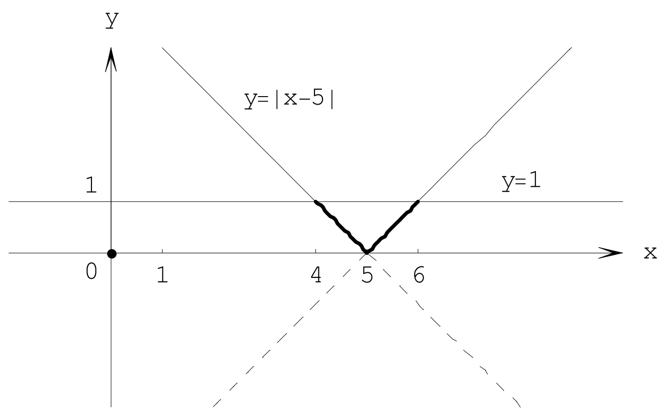
$|x-5| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad -1 < x-5 < 1$

$-1 < x-5 < 1 \quad \Rightarrow \quad -1 < x-5 \quad \& \quad x-5 < 1$, tj.

$x > 4 \quad \& \quad x < 6$

Rješenje: $\forall x \in (4,6)$.

2. <u>način</u> (grafički)



$$y = |x-5| = \begin{cases} x-5, & x-5 \geq 0 \\ -(x-5), & x-5<0 \end{cases} = \begin{cases} x-5, & x \geq 5 \\ -x+5, & x<5 \end{cases}$$
$$y = 1$$
$$y = x-5 \quad \cap \quad y=1 \;\Rightarrow\; (4,1)$$
$$y = -x+5 \quad \cap \quad y=1 \;\Rightarrow\; (6,1)$$

Rješenje: Nejednakost $|x-5|<1$ je ispunjena za $\forall x \in (4,6)$.

Ad 7)

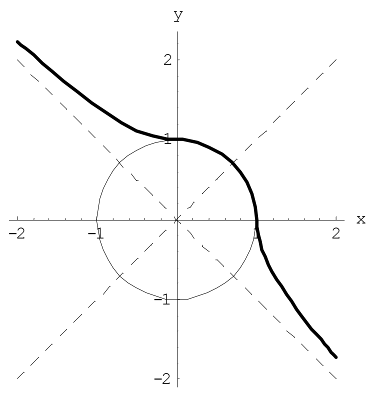
a) $\left.\begin{matrix} x>0 \\ y>0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \quad x^2+y^2=1$

b) $\left.\begin{matrix} x>0 \\ y>0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \quad x^2-y^2=1$

c) $\left.\begin{matrix} x<0 \\ y>0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \quad -x^2+y^2=1$

d) $\left.\begin{matrix} x<0 \\ y<0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \quad -x^2-y^2=1 \Rightarrow \quad x^2+y^2=-1$

Slika:



BINOMNI TEOREM

Potencije binoma $(a+b)$:

$$(a+b)^0 = 1$$
$$(a+b)^1 = a+b$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a+b)^4 = ?$$
$$\vdots$$
$$(a+b)^n = ?$$

Uvodimo pojam faktorijela i binomnih koeficijenata.

Faktorijele su umnošci:

$n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$
$n! =$ produkt prvih n prirodnih brojeva

Čitamo: "n faktorijela"
Definira se: $0! = 1$

Za vježbu izračunati: $5!$, $\frac{7!}{3!}$, $(n-2)!$, $\frac{n!}{(n-2)!}$.

Binomni koeficijenti su izrazi oblika:

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-(k-1))}{1 \cdot 2 \cdots k}, \qquad k > 0$$

$$\binom{n}{0} = 1, \quad \binom{0}{0} = 0, \qquad k = 0$$

Čitamo: "n povrh k" ili "n iznad k"

Za vježbu izračunati: $\binom{7}{2}, \binom{7}{5}$.

Binomni koeficijenti pomoću faktorijela:

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-(k-1))}{1 \cdot 2 \cdots k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad (*)$$

Vrijedi:

(1) Za binomne koeficijente vrijedi da su u nizu

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{n-2}, \binom{n}{n-1}, \binom{n}{n},$$

po dva koeficijenta jednako udaljena od krajeva međusobno jednaka, tj. da je

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Provjerimo!

Prema formuli (*), $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

(2) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

Dokaz slijedi pomoću formule (*).

Za vježbu, provjeriti da je $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.

Binomni teorem

Ako su a i b bilo koji realni ili kompleksni brojevi i $n \in N$, tada vrijedi:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n .$$

Dokaz. Matematičkom indukcijom.

Binomnu formulu možemo zapisati u obliku:

$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$, odnosno $(a-b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k a^{n-k} b^k$.

Zadaci za vježbu:

1. Koristeći binomnu formulu izračunati $(1+x)^6$, $\left(x^2+\sqrt{x}\right)^3$, $\left(1+2x^2\right)^4$.
2. U binomnom razvoju od $\left(x+x^3\right)^7$ naći koeficijent uz x^{11}.
3. U binomnom razvoju od $(1+x)^n$ odrediti n tako da treći koeficijent bude 15.
4. Naći član binomnog razvoja $\left(3xy^2+z^2\right)^7$ koji sadrži y^6.

Ad4)

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-2}a^2b^{n-2} + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=n}^{0} \binom{n}{n-k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k .$$

$$\left(3xy^2+z^2\right)^7=\sum_{k=0}^{7}\binom{7}{k}\left(3xy^2\right)^{7-k}\cdot\left(z^2\right)^k$$

$$3^{7-k}\cdot x^{7-k}\cdot y^{2(7-k)}\cdot z^{2k}\quad\Rightarrow\quad y^{14-2k}=y^6\quad\Rightarrow\quad 14-2k=6\quad\Rightarrow\quad k=4$$

Traženi član je:

$$\binom{7}{4}3^{7-4}\cdot x^{7-4}\cdot y^{2(7-4)}\cdot z^{2\cdot 4}=3^3\,\frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot x^3y^6z^8=27\cdot 35x^3y^6z^8=945x^3y^6z^8\,.$$