3. KOMPLEKSNI BROJEVI

Do sada smo se upoznali sa sljedećim skupovima brojeva: *N, Z, Q, I* i *R*. Nemogućnost rješavanja nekih jednadžbi na nekom skupu brojeva ukazivala je potrebu za njegovim proširenjem. Slično tome, neke se, čak i jednostavne jednadžbe ne mogu riješiti u polju realnih brojeva. Na primjer $x^2+1=0$, nema rješenje u *R*.
Naime,

$$x^2=-1$$
$$x=\pm\sqrt{-1}\notin R$$

Brojevno područje se proširuje na sljedeći način:
Uvodi se novi objekt koji se naziva *imaginarna jedinica*, označava slovom *i*, a ima svojstvo da je

$$i^2=-1.$$

Proširenje *C* polja *R* ima mnoga važna svojstva. Istaknimo da svaka algebarska jednadžba oblika

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0=0$$

gdje su $a_0, a_1,\ldots, a_n\in C$ ima rješenje u *C* (takozvani *osnovni teorem algebre*).

Skup *C* se najjednostavnije definira kao skup svih uređenih parova $(x, y)\in R\times R$. Dakle, svaki kompleksni broj $z\in C$ prikazuje se jednoznačno u obliku $z=(x, y)$. Uvedemo li operacije zbrajanja i množenja formulama

$$(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+y_1,x_2+y_2),$$

$$(x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2)=(x_1x_2-y_1y_2,x_1y_2+x_2y_1),$$

imaginarnu jedinicu kao broj $i=(0, 1)$, slijedi oblik

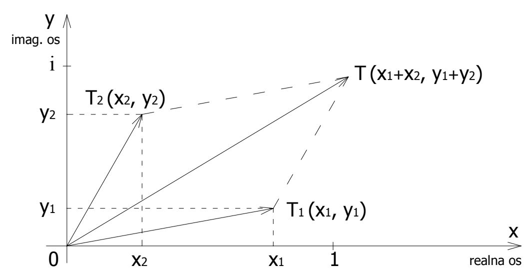
$$z=(x, y)=(x, 0)+(0. 1)(y, 0)=x+iy,$$

koji se zove *standardni oblik kompleksnog broja*. Pri tome je

$x=\mathrm{Re}\, z$ …*realni dio* kompleksnog broja z
$y=\mathrm{Im}\, z$ …*imaginarni dio* kompleksnog broja z

Nije teško provjeriti da je $(C,+,\bullet)$ ***polje kompleksnih brojeva***, tj. da su zadovoljeni ranije spomenuti aksiomi polja A-1) – A-9).

Geometrijski se kompleksni brojevi prikazuju u *kompleksnoj* ili *Gaussovoj ravnini*.



Operacije u skupu *C*

Neka su $z_1 = (x_1, y_1) = x_1 + iy_1,\ z_2 = (x_2, y_2) = x_2 + iy_2 \in C$.

Jednakost kompleksnih brojeva

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \ \&\ y_1 = y_2$$

Zbrajanje i množenje (ranije definirano)

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$
$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

Oduzimanje i dijeljenje se kao i kod realnih brojeva definiraju iz prethodnih operacija:

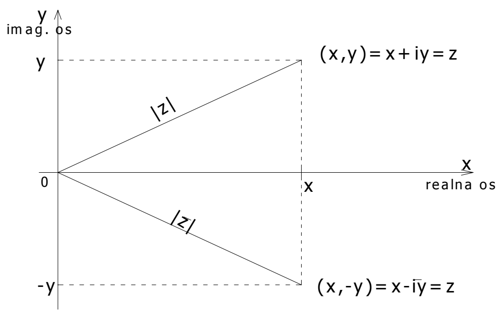
$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$
$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 z_2^{-1} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} \cdot \frac{x_2 - iy_2}{x_2 - iy_2} = \equiv = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2},$$
$$(z_2 \neq 0)$$

Apsolutna vrijednost (modul) kompleksnog broja

Apsolutnom vrijednošću ili *modulom* kompleksnog broja $z = x + iy$ zove se realan broj $\sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$. Označava se $|z|$, tj. $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Konjugiranje

Kompleksni broj $x - iy$ naziva se *konjugirano kompleksnim brojem* broja $x + iy$. Označava se sa $\overline{z}$, tj. $\overline{z} = x - iy$. U Gaussovoj ravnini su brojevi z i $\overline{z}$ simetrični s obzirom na os x.



Nije teško provjeriti sljedeća osnovna svojstva gornjih dviju operacija:

1) $\overline{\overline{z}} = z$
2) $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z}_1 \pm \overline{z}_2$
3) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2$
4) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}$
5) $z \cdot \overline{z} = |z|^2$

6) $|z| = |\bar{z}|$

7) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

8) $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$ *nelednakost trokuta* za kompleksne brojeve

Zadaci:

1. Riješiti sustav jednadžbi $\begin{matrix} z_1 + \bar{z}_2 = 1 + 2i \\ 2 + iz_1 + \dfrac{z_2}{i} = 0 \end{matrix}$, ako je $Im(z_2) = -\dfrac{6+\sqrt{6}}{2}$.

Rješenje:

$$z_1 = a + bi$$

$$z_2 = c - \frac{6+\sqrt{6}}{2} i$$

$$\bar{z}_2 = c + \frac{6+\sqrt{6}}{2} i$$

$$z_1 i = (a + bi)i = -b + ai$$

$$\frac{z_2}{i} = \frac{z_2}{i}\frac{i}{i} = \frac{z_2 i}{-1} = -\left(\frac{6+\sqrt{6}}{2} + ci\right)$$

$$\begin{matrix} a + bi + c + \dfrac{6+\sqrt{6}}{2} i = 1 + 2i \\ 2 - b + ai - \dfrac{6+\sqrt{6}}{2} - ci = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} (a+c) + (b + \dfrac{6+\sqrt{6}}{2})i = 1 + 2i \\ (2 - b - \dfrac{6+\sqrt{6}}{2}) + (a-c)i = 0 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} a + c = 1 \\ b + \dfrac{6+\sqrt{6}}{2} = 2 \\ 2 - b - \dfrac{6+\sqrt{6}}{2} = 0 \\ a - c = 0 \end{matrix} \Rightarrow a = \frac{1}{2},\ b = -\frac{2+\sqrt{6}}{2},\ c = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z_1 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{2+\sqrt{6}}{2} i \\ z_2 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{6+\sqrt{6}}{2} i \end{cases}.$$

2. Odrediti kompleksne brojeve koji zadovoljavaju sljedeće uvjete:

$$\left|\frac{z-12}{z-8i}\right|=\frac{5}{3}, \qquad \left|\frac{z-4}{z-8}\right|=1.$$

Rješenje:

$$z=x+yi$$

$$\frac{z-12}{z-8i}=\frac{x+yi-12}{x+yi-8i}=\frac{(x-12)+yi}{x+(y-8)i}$$

$$\left|\frac{z-12}{z-8i}\right|=\frac{|(x-12)+yi|}{|x+(y-8i)|}=\frac{\sqrt{(x-12)^2+y^2}}{\sqrt{x^2+(y-8)^2}}=\frac{5}{3}\Rightarrow$$

$$3\sqrt{(x-12)^2+y^2}=5\sqrt{x^2+(y-8)^2} \quad /^2$$

$$9\left(x^2-24x+144+y^2\right)=25\left(x^2+y^2-16y+64\right)$$

$$\vdots$$

$$2x^2+2y^2+27x-50y-27\cdot 6+25\cdot 8=0$$

$$\left|\frac{z-4}{z-8}\right|=\frac{|x+yi-4|}{|x+yi-8|}=\frac{\sqrt{(x-4)^2+y^2}}{\sqrt{(x-8)^2+y^2}}=1$$

$$\sqrt{(x-4)^2+y^2}=\sqrt{(x-8)^2+y^2} \quad /^2$$

$$(x-4)^2+y^2=(x-8)^2+y^2$$

$$\vdots$$

$$x=6$$

$$x=6 \quad \& \quad 2x^2+2y^2+27x-50y-27\cdot 6+25\cdot 8=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} z_1=6+8i \\ z_2=6+17i \end{cases}.$$

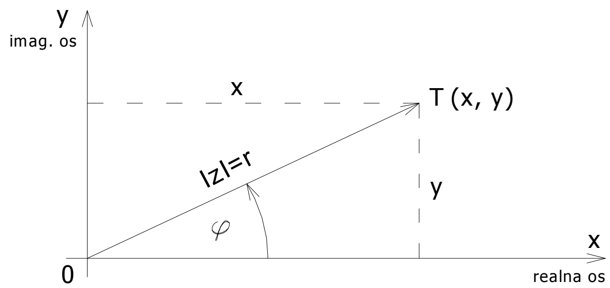
Trigonometrijski zapis kompleksnog broja

Neka je $z\in C, z\neq 0$.
Broju $z=x+iy$ u kompleksnoj ravnini odgovara točka $Z(x, y)$.
Označimo sa

$r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ ……*modul*, tj udaljenost točke Z od ishodišta O koordinatnog sustava

φ ……*argument,* tj. kut za koji moramo zakrenuti pozitivni dio osi x oko O (u pozitivnom smjeru) tako da padne na polupravac OZ

Argument φ nije jednoznačno određen budući da ćemo isto postići i zakretanjem osi x za kut $\varphi + 2k\pi$. U zadacima ćemo se ograničiti na promatranje *glavne vrijednosti argumenta*, tj. na $\varphi \in [0, 2\pi)$.



Iz pravokutnog trokuta *OAZ* slijedi:

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \qquad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \text{ odnosno}$$

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi,$$

pa broj $z = x + iy$ možemo zapisati u obliku

$$z = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)$$

kojeg zovemo ***trigonometrijski zapis*** kompleksnog broja z.

Operacije množenja, dijeljenja i potenciranja kompleksnih brojeva zadanih u trigonometrijskom obliku

Neka su $z_1 = r_1\left(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1\right)$, $z_2 = r_2\left(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\right) \in C$.

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \left(r_1 = r_2\right) \& \left(\varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi\right)$$

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 r_2\left(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i\left(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2\right)\right) = \\ &= r_1 r_2\left(\cos\left(\varphi_1 + \varphi_2\right) + i\sin\left(\varphi_1 + \varphi_2\right)\right) \qquad (*) \end{aligned}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\,\frac{\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1}{\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2}\cdot\frac{\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2}{\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2} = \cdots = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) + i\sin\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)\right)$$

$(z_2 \neq 0)$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}\,\frac{1}{\cos\varphi + i\sin\varphi} = r^{-1}\left(\cos\left(-\varphi\right) + i\sin\left(-\varphi\right)\right)$$

$$(*) \Rightarrow z^2 = r^2\left(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi\right)$$

Formula

$$z^n = r^n\left(\cos n\varphi + i\sin n\varphi\right), \quad n \in N,$$

naziva se *Moivreova formula za potenciranje* i dokazuje se matematičkom indukcijom (dokaz na predavanju). Abraham de Moivre (1667.-1754.) – engleski matematičar

Korjenovanje kompleksnih brojeva zadanih u trigonometrijskom obliku

Neka je $z = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right) \in C$.

n – tim korijenom iz z zovemo kompleksni broj $\omega = \rho\left(\cos\psi + i\sin\psi\right)$ takav da je $\omega^n = z$, tj. $\omega = \sqrt[n]{z}$, pri čemu imamo točno n takvih brojeva-korijena $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{n-1}$.

$$\omega^n = z \quad \Rightarrow \quad \rho^n\left(\cos n\psi + i\sin n\psi\right) = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \rho^n = r \\ \cos n\psi = \cos\varphi \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r} \\ n\psi = \varphi + 2k\pi \ \Rightarrow \ \psi = \dfrac{\varphi + 2k\pi}{n} \end{cases}$$

Slijedi *Moivreova formula za korjenovanje*:

$$\sqrt[n]{z} = \omega_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \quad k = 0,1,2,\ldots,n-1.$$

Vrijedi:

- korijeni $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{n-1}$ međusobno su različiti,
- brojevi $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{n-1}$ imaju jednake module pa n točaka koje ih predstavljaju leže na kružnici polumjera $\sqrt[n]{r}$,
- prvo rješenje-korijen ima argument $\dfrac{\varphi}{n}$,
- razlika svakih dvaju susjednoh argumenata iznosi $\dfrac{2\pi}{n}$.

Zadaci:

1. Riješiti jednadžbu $2z^3 - 1 - i = 0$ i prikazati rješenja u kompleksnoj ravnini.

$$2z^3 - 1 - i = 0 \quad \Rightarrow \quad z = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i},$$

$$u = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i, \quad |u| = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad u = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$$

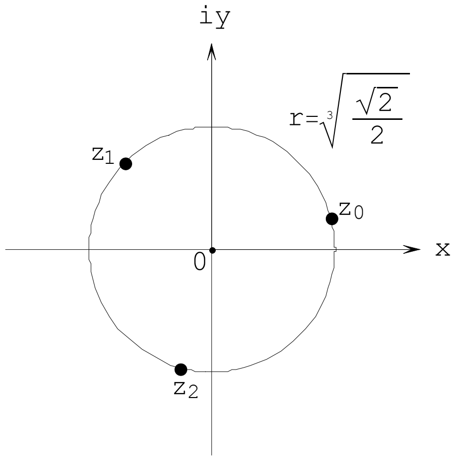
$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}, \ \sin\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{\pi}{4}$$

$$z_k = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+k2\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+k2\pi}{3}\right), \quad k = 0, 1, 2$$

$$z_0 = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(cos\frac{\pi}{12} + i\,sin\frac{\pi}{12}\right)$$

$$z_1 = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(cos\frac{9\pi}{12} + i\,sin\frac{9\pi}{12}\right)$$

$$z_2 = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(cos\frac{17\pi}{12} + i\,sin\frac{\pi}{12}\right).$$



2. Odrediti sva rješenja jednadžbe $z^4 - (1-i)^{10} = 0$ i nacrtati ih u kompleksnoj ravnini.

$$z^4 - (1-i)^{10} = 0$$

$$(1-i)^{10} = \left[(1-i)^2\right]^5 = \left[1-2i+i^2\right]^5 = (-2i)^5 = -2^5 \cdot i^5 = -(2)^5 \cdot i$$

$$(1-i)^{10} = -32i$$

$$z^4 - (-32i) = 0$$

$$z^4 = -32i \qquad \Rightarrow \qquad z = \sqrt[4]{-32i}$$

$\omega = 0 - 32i$ zapisujemo u trigonometrijskom obliku $\omega = |\omega|(cos\,\varphi + i\,sin\,\varphi)$

$$\Rightarrow \qquad |\omega| = 32$$

$$cos\,\varphi = \frac{0}{32} = 0, \quad sin\,\varphi = \frac{-32}{32} = -1, \quad (tg\varphi = -\infty) \Rightarrow \varphi = \frac{3\pi}{2}$$

$$\omega = 32\left(cos\frac{3\pi}{2} + i\,sin\frac{3\pi}{2}\right)$$

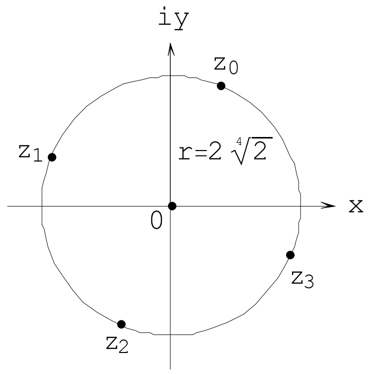
$$\left(\sqrt[4]{\omega}\right)_k = \sqrt[4]{|\omega|}\left(cos\frac{\varphi+2k\pi}{4} + i\,sin\frac{\varphi+2k\pi}{4}\right), \; k = 0,1,2,3$$

$$z_0 = \sqrt[4]{32}\left(cos\frac{\frac{3\pi}{2}}{4} + i\,sin\frac{\frac{3\pi}{2}}{4}\right) = 2\sqrt[4]{2}\left(cos\frac{3\pi}{8} + i\,sin\frac{3\pi}{8}\right)$$

$$z_1 = \sqrt[4]{32}\left(cos\frac{\frac{3\pi}{2}+2\pi}{4} + i\,sin\frac{\frac{3\pi}{2}+2\pi}{4}\right) = 2\sqrt[4]{2}\left(cos\frac{7\pi}{8} + i\,sin\frac{7\pi}{8}\right)$$

$$z_2 = \sqrt[4]{32}\left(cos\frac{\frac{3\pi}{2}+4\pi}{4} + i\,sin\frac{\frac{3\pi}{2}+4\pi}{4}\right) = 2\sqrt[4]{2}\left(cos\frac{11\pi}{8} + i\,sin\frac{11\pi}{8}\right)$$

$$z_3 = \sqrt[4]{32}\left(cos\frac{\frac{3\pi}{2}+6\pi}{4} + i\,sin\frac{\frac{3\pi}{2}+6\pi}{4}\right) = 2\sqrt[4]{2}\left(cos\frac{15\pi}{8} + i\,sin\frac{15\pi}{8}\right)$$



3. Odrediti realnu nulu polinoma $P_3(x) = x^3 + ax + b$ i koeficijente $a, b \in R$, ako je poznato da je $P_3(1-2i) = 0$.

$$P_3(x) = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) = x^3 + ax + b \quad \Rightarrow \quad \frac{x^3 + ax + b}{(x-x_1)(x-x_2)} = (x - x_3)$$

$x_1 = 1-2i$

$\underline{x_2 = 1+2i}$

$x - x_1 = x - 1 + 2i$

$\underline{x - x_2 = x - 1 - 2i}$

$$(x-x_1)(x-x_2)=(x-(1-2i))(x-(x+2i))=$$
$$=x^2-(1+2i)x-(1-2i)x+(1-2i)(1+2i)=$$
$$=x^2-2x+5$$

1. način:

$$x^3+ax+b=(x^2-2x+5)(x-x_3)=$$
$$=x^3-(x_3+2)x^2+(2x_3+5)x-5x_3$$

$$\begin{aligned} & x_3+2=0 && \Rightarrow \quad x_3=-2 \\ \Rightarrow \quad & 2x_3+5=a && \Rightarrow \quad a=1 \\ & -5x_3=b && \Rightarrow \quad b=10 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad P_3(x)=(x-(1-2i))(x-(1+2i))(x+2)\square$$

2. način:

$$(x^3+ax+b):(x^2-2x+5)=x+2=x-x_3$$
$$\underline{x^3-2x^2+5x}$$

$$2x^2+ax-5x+b$$
$$2x^2+x(a-5)+b$$
$$\underline{2x^2-4x+10}$$

$$ax-5x+4x+b-10$$
$$ax-x+b-10=0$$
$$x(a-1)=10-b \Rightarrow a=1,\ b=10$$

$$P_3(x)=x^3+x+10$$
$$P_3(x)=(x-(1-2i))(x-(1+2i))(x+2).$$