7. ELEMENTARNE FUNKCIJE

Među funkcijama koje su dane formulom važnu ulogu imaju takozvane *elementarne funkcije*. Poznavanje svojstava elementarnih funkcija omogućit će lakše svladavanje gradiva matematičke analize i rješavanje mnogih zadataka tehničke prirode. Razmotrit ćemo kao prvo *osnovne elementarne funkcije*.

Osnovne elementarne funkcije su:

1. polinomi,
2. racionalne funkcije,
3. eksponencijalne funkcije,
4. logaritamske funkcije,
5. opća potencija,
6. trigonometrijske funkcije,
7. ciklometrijske funkcije.

Elementarne funkcije su funkcije koje se mogu dobiti iz osnovnih elementarnih funkcija pomoću konačnog broja aritmetičkih operacija (+, -, ·, :) i konačnog broja kompozicija elementarnih funkcija.

Osim navedenih osnovnih obradit ćemo i sljedeće elementarne funkcije:
8. hiperbolne funkcije,
9. area funkcije.

Algebarske funkcije su one elementarne funkcije koje su dane pomoću kompozicije racionalnih funkcija, potenciranja s racionalnim eksponentom i sa četri osnovne računske operacije.

Transcedentne funkcije su one elementarne funkcije koje nisu algebarske. Tu spadaju eksponencijalne, logaritamske, trigonometrijske, ciklometrijske, hiperbolne i area funkcije.

Polinomi

Polinomi su funkcije oblika

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \qquad p_n : R \to R$$

$n \in N,\ a_i \in R,\ i = 0, \ldots, n$

a_i – *koeficijenti* članova polinoma

$a_n \neq 0 \Rightarrow$ polinom n – tog stupnja

$p_0(x) = a_0,\ \ a_0 \neq 0 \Rightarrow$ polinom nultog stupnja, tj. *konstanta*

Pod *nultočkom* funkcije $f(x)$ podrazumijevamo broj x_0 za koji funkcija poprima vrijednost nula, tj. $f(x_0)=0$.
Nultočke polinoma $p_n(x)$ su one vrijednosti od x za koje je $p_n(x)=a_n x^n+\cdots+a_1 x+a_0=0$.

Bez dokaza navodimo neka svojstva polinoma:

- Dva polinoma po varijabli x identično su jednaka ako i samo ako su koeficijenti jednako visokih potencija međusobno jednaki.
- Svaki se polinom n-tog stupnja može rastaviti u produkt od n linearnih faktora:
  $$p_n(x)=a_n(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n),$$
  gdje su $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nultočke tog polinoma koje mogu biti realni i kompleksni brojevi. Ako su neki od njh međusobno jednaki, govorimo o višestrukim nultočkama. Za kompleksne nultočke vrijedi da dolaze u paru, tj. ako je $x_1=a+ib$ nultočka polinoma onda je i konjugirano kompleksni broj $x_1=a-ib$ nultočka tog polinoma i ima istu višestrukost.

Primjer: Faktorizacija polinoma.

a) $p_3(x)=x^3+x^2-4x-4=x^2(x+1)-4(x+1)=(x+1)(x^2-4)=(x+1)(x+2)(x-2)$

b) $p_4(x)=x^4-3x^2-4=x^4-4x^2+x^2-4=x^2(x^2-4)+(x^2-4)=(x^2-4)(x^2+1)=$
$=(x-2)(x+2)(x-i)(x+i)$

Racionalne funkcije

Racionalne funkcije su funkcije oblika

$f(x)=\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, gdje su $P_n(x)$ i $Q_m(x)$ polinomi stupnja n, odnosno m, koji nemaju zajedničkih nultočaka.

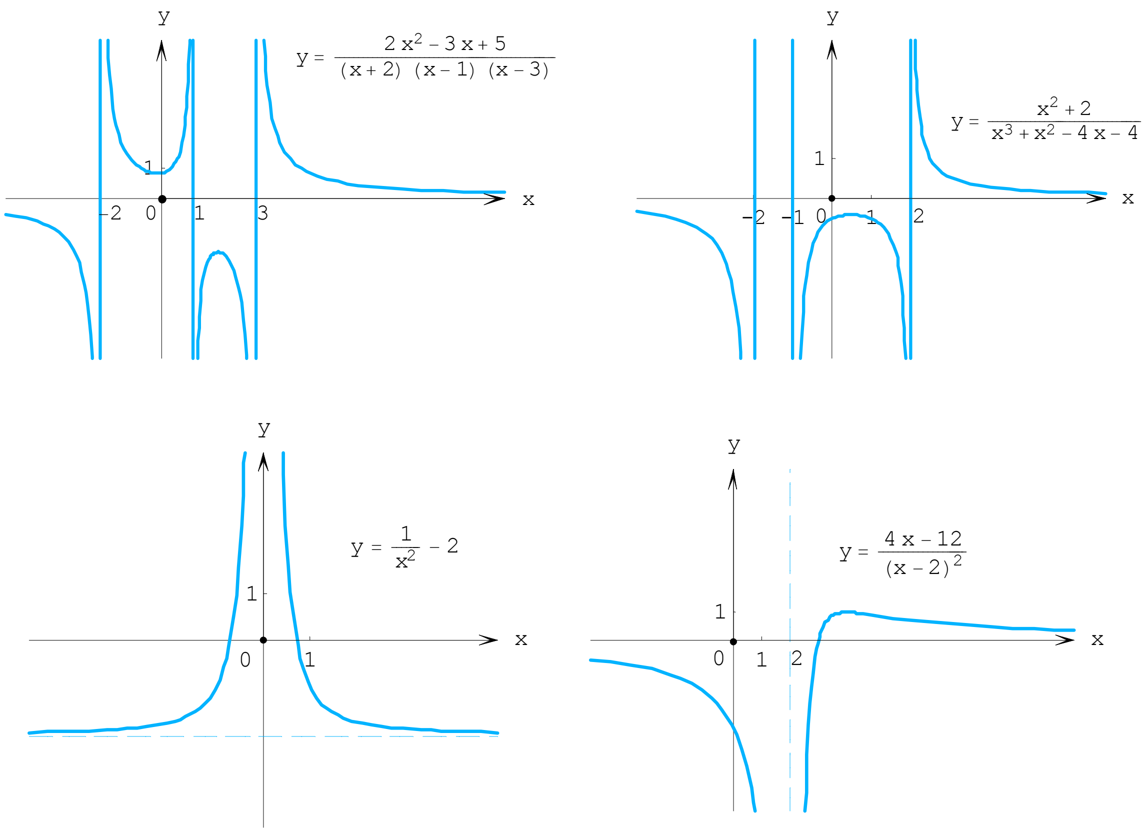
$n<m \Rightarrow$ prava racionalna funkcija,
$n\geq m \Rightarrow$ dijeljenjem brojnika s nazivnikom funkciju možemo napisati u obliku polinoma i prave racionalne funkcije.

- Domena: Skup svih realnih brojeva osim nultočaka polinoma $Q_m(x)$ u nazivniku.
- Kodomena: R
- *Nultočke funkcije* su nultočke polinoma u brojniku, tj. rješenja jednadžbe $P_n(x)=0$.
- Nultočke polinoma u nazivniku nazivamo *polovima* racionalne funkcije.
- Prema tome da li se radi o jednostrukoj ili višestrukoj nultočki funkcije (polu), govorimo o nultočki (polu) *prvog* ili *višeg reda*. Osim toga, nultočke (polovi) funkcije mogu biti *parnog* i *neparnog reda*, ovisno o tome dali im je kratnost paran ili neparan broj.

Kako skicirati graf racionalne funkcije $f(x)=\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ **?**

1. Odrediti nultočke funkcije *f*. U okolini nultočke parnog (neparnog) reda funkcija ne mijenja (mijenja) predznak.
2. Odrediti polove funkcije *f* i u njima nacrtati vertikalne pravce, koje zovemo *vertikalnim asimptotama* funkcije.U okolini pola parnog (neparnog) reda funkcija ne mijenja (mijenja) predznak.

Grafovi nekih racionalnih funkcija:



Rastav na parcijalne razlomke

Rastaviti racionalnu funkciju $f(x)=\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ na *parcijalne razlomke* znači prikazati je kao

zbroj jednostavnih racionalnih funkcija, npr. $\dfrac{A}{(x-x_1)^n}$ $(n\geq 1)$ i $\dfrac{A+Bx}{(x^2+ax+b)^n}$ $(n\geq 1)$, gdje je

$(x-x_1)$ linearan faktor a (x^2+ax+b) kvadratni faktor s negativnom diskriminantom, polinoma $Q_m(x)$.

Primjer: Rastavljane na parcijalne razlomke.

a) $$\frac{2x^2-3x+5}{(x+2)(x-1)(x-3)}=\frac{A}{(x+2)}+\frac{B}{(x-1)}+\frac{C}{(x-3)} \Big/ \cdot (x+2)(x-1)(x-3)$$

$$2x^2-3x+5=A(x-1)(x-3)+B(x+2)(x-1)(x-3)+C(x+2)(x-1)$$

$$2x^2-3x+5=A(x^2-4x+3)+B(x^2-x-6)+C(x^2+x-2)$$

$$\underline{2x^2-3x+5=x^2(A+B+C)+x(-4A-B+C)+(3A-6B-2C)}$$

$\Rightarrow$ sustav triju jednadžbi s tri nepoznanice: $\begin{cases} A+B+C=2 \\ -4A-B+C=-3 \\ 3A-6B-2C=5 \end{cases}$

$\Rightarrow$ rješenje sustava: $A=\frac{19}{15},\quad B=-\frac{2}{3},\quad C=\frac{7}{5}$

$\Rightarrow$ rastav na parcijalne razlomke: $\dfrac{2x^2-3x+5}{(x+2)(x-1)(x-3)}=\dfrac{\frac{19}{15}}{(x+2)}+\dfrac{-\frac{2}{3}}{(x-1)}+\dfrac{\frac{7}{5}}{(x-3)}$.

b) $$\frac{1}{(x-2)^2(x^2+1)}=\frac{A}{(x-2)}+\frac{B}{(x-2)^2}+\frac{Cx+D}{(x^2+1)} \Big/ \cdot (x-2)^2(x^2+1)$$

$$1=A(x-2)(x^2+1)+B(x^2+1)+Cx+D(x-2)^2$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\underline{1=x^3(A+C)+x^2(-2A+B-4C+D)+x(A+4C-4D)-2A+B+4D}$$

$\Rightarrow$ sustav četiriju jednadžbi s četiri nepoznanice: $\begin{cases} A+C=0 \\ -2A+B-4C+D=0 \\ A+4C-4D=0 \\ -2A+B+4D=1 \end{cases}$

$\Rightarrow$ rješenje sustava: $A=-\frac{4}{25},\quad B=\frac{1}{5},\quad C=\frac{4}{25},\quad D=\frac{3}{25}$

$\Rightarrow$ rastav na parcijalne razlomke: $\dfrac{1}{(x-2)^2(x^2+1)}=\dfrac{-\frac{4}{25}}{(x-2)}+\dfrac{\frac{1}{5}}{(x-2)^2}+\dfrac{\frac{4}{25}x+\frac{3}{25}}{(x^2+1)}$.

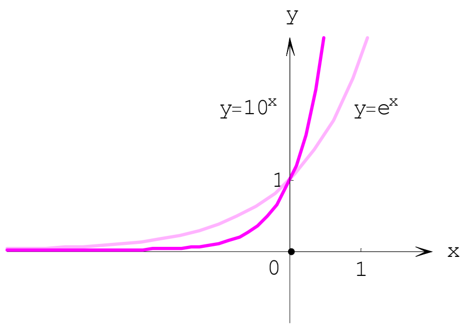
Eksponencijalne funkcije

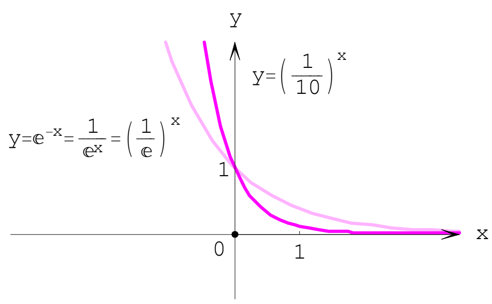
Funkciju oblika $f(x)=a^x,\ \ a>0,\ a\neq 1$, zovemo *eksponencijalnom funkcijom baze a*.

Svojstva eksponencijalnih funkcija:

1. Domena: R;
2. Skup vrijednosti: Skup svih pozitivnih realnih brojeva, tj. R^+;
3. $f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2)$, tj. $a^{x_1+x_2}=a^{x_1}\cdot a^{x_2}$;
4. $f(x_1-x_2)=f(x_1):f(x_2)$, tj. $a^{x_1-x_2}=a^{x_1}\cdot a^{-x_2}=\dfrac{a^{x_1}}{a^{x_2}}$;
5. $f(0)=1$, tj. $a^0=1$;
6. $\left(a^{x_1}\right)^{x_2}=a^{x_1x_2}$;
7. Bijekcija sa R na R^+;
8. $a>1 \Rightarrow f$ je strogo rastuća funkcija;
9. $0<a<1 \Rightarrow f$ je strogo padajuća funkcija.

Grafovi nekih eksponencijalnih funkcija:





Logaritamske funkcije

Inverznu funkciju eksponencujalne funkcije $g(x)=a^x$, zovemo *logaritamskom funkcijom baze a* i označavamo $f(x)=log_a\, x$, $a>0$, $a\neq 1$.

Vrijedi:

$log_a\, x=y \quad\Leftrightarrow\quad x=a^y$, i za njihove kompozicije:

$g(f(x))=x$, tj. $a^{log_a x}=x$, $\forall x>0$,

$f(g(x))=x$, tj. $log_a\, a^x=x$, $\forall x\in R$.

Svojstva logaritamskih funkcija:

1. Domena: Skup svih pozitivnih realnih brojeva, tj. R^+;
2. Skup vrijednosti: R;
3. $f(x_1x_2)=f(x_1)+f(x_2)$, tj. $log_a(x_1x_2)=log_a\, x_1+log_a\, x_2$, $x_1,x_2>0$;
4. $f\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right)=f(x_1)-f(x_2)$, tj. $log_a\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right)=log_a\, x_1-log_a\, x_2$, $x_1,x_2>0$;
5. $f(1)=0$, tj. $log_a 1=0$;

6. $f\left(x^n\right) = n \cdot f(x)$, tj. $log_a x^n = n\, log_a x, \quad x > 0$;
7. Bijekcija sa R^+ na R;
8. $a > 1 \Rightarrow f$ je strogo rastuća funkcija;
9. $0 < a < 1 \Rightarrow f$ je strogo padajuća funkcija;
10. $log_a x = \dfrac{log_b x}{log_b a}, \quad x > 0, \quad a,b > 0, \quad a,b \neq 1$.

    Ovu vezu logaritama po različitim bazama ćemo dokazati.

    Iz $a^{x_1} = y$ i $b^{x_2} = y \Rightarrow x_1 = log_a y$ i $x_2 = log_b y$.

    Tada je

    $a^x = \left(b^{log_b a}\right)^x = b^{x\, log_b a}$, tj. $log_b a^x = x \cdot log_b a$.

    $a^{x_1} = y \Rightarrow x_1\, log_b a = log_b y = x_2$, odnosno

    $log_a y = x_1 = \dfrac{log_b y}{log_b a}$, odakle slijedi tvrdnja.□

11. Iz prethodne, dokazane jednakosti, za $x = b$, slijedi $log_a b = \dfrac{1}{log_b a}$.

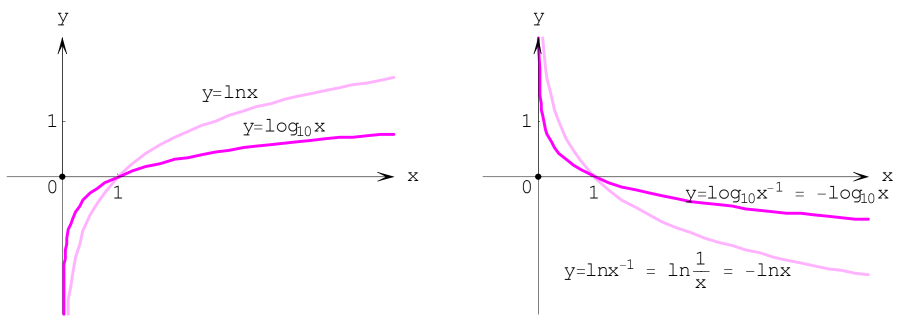
Neke "specijalne" baze:

Ako je baza $a = 10$, pišemo $y = log\, x$ umjesto $y = log_{10} x$, i zovemo *dekadski logaritam.*
Ako je baza $a = e$, pišemo $y = ln\, x$ umjesto $y = log_e x$, i zovemo *prirodni logaritam.*

Veza dekadskih i prirodnih logaritama (prema 10.):

$$log\, x = \frac{ln\, x}{ln 10} = \frac{1}{ln 10} ln\, x = M\, ln\, x, \qquad M = \frac{1}{ln 10} = log\, e = 0.4342944819...$$

Grafovi nekih logaritamskih funkcija:



Opća potencija

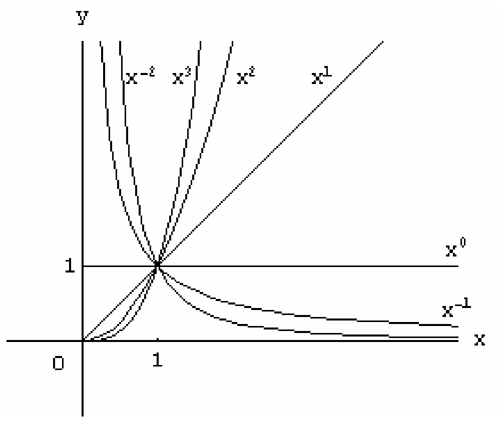
Općom potencijom nazivamo funkciju

$f(x) = x^c = \left(e^{ln\, x}\right)^c = e^{c\, ln\, x}, \quad x > 0, c \in R.$

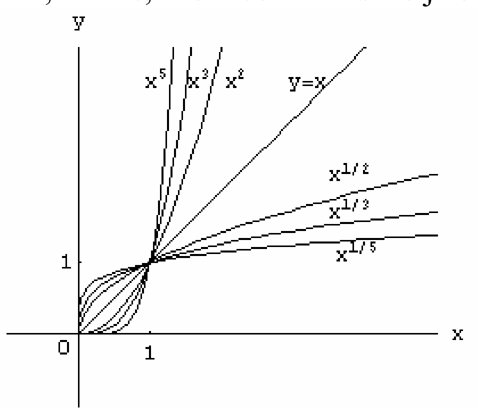
$f : R^+ \to R^+$

Na primjer: $x, x^{\frac{1}{3}}, \frac{1}{x}, x^{-2}, \sqrt[3]{x^2}, \dots$.

Grafovi funkcija $x \mapsto x^n$ i $x \mapsto x^{-n}$, $n \in N$.



Grafovi funkcija $x \mapsto x^{\frac{1}{n}}$, $n \in N$, kao inverznih funkcija od $x \mapsto x^n$.



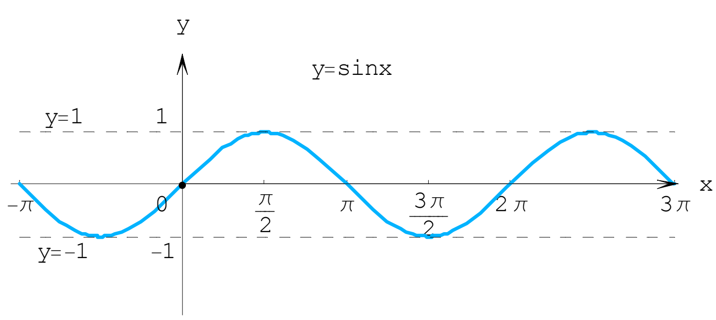
Trigonometrijske funkcije

Sinus

Oznaka: *sin*

$sin: R \to [-1,1]$

Graf:



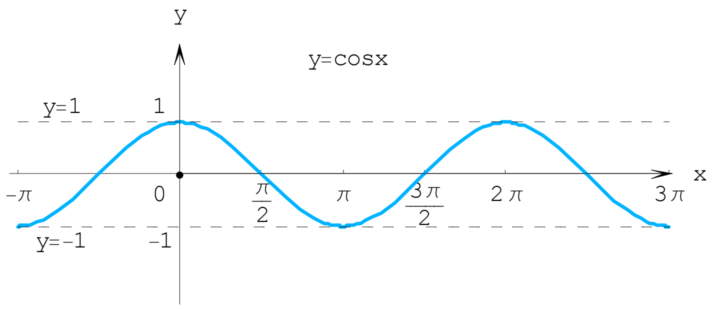
Svojstva:
1. $sin(-x) = -sin\,x$, tj. sin je neparna funkcija
2. $sin(x) = sin(x + 2k\pi),\ k \in Z$, tj. sin je periodična funkcija s periodom 2π
3. sin je surjektivna funkcija

Kosinus

Oznaka: cos

$cos : R \to [-1,1]$

Graf:



Svojstva:
1. $cos(-x) = cos\,x$, tj. cos je parna funkcija,
2. $cos(x) = cos(x + 2k\pi),\ k \in Z$, tj. sin je periodična funkcija s periodom 2π,
3. cos je surjektivna funkcija.

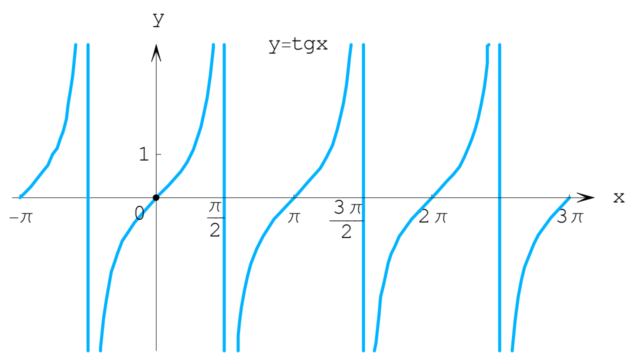
Tangens

Oznaka: tg

$$tgx = \frac{sin\,x}{cos\,x}, \quad cos\,x \neq 0$$

$$tg : R \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \,\middle|\, k \in Z \right\} \to R$$

Graf:



Svojstva:
1. $tg(-x) = -tgx$, tj. tg je neparna funkcija,
2. $tg(x) = tg(x + k\pi),\ k \in Z$, tj. tg je periodična funkcija s periodom π.

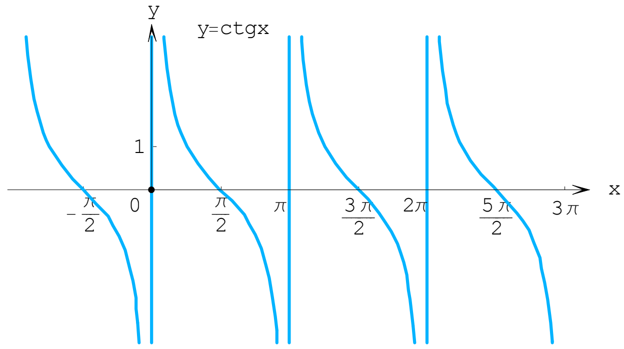
Kotangens

Oznaka: *ctg*

$$ctgx = \frac{cos\,x}{sin\,x}, \quad sin\,x \neq 0$$

$$ctg : R \setminus \{k\pi | \, k \in Z\} \to R$$

Graf:



Svojstva:

1. $ctg(-x) = -ctgx$, tj. *ctg* je neparna funkcija,
2. $ctg(x) = ctg(x + k\pi),\, k \in Z$, tj. *ctg* je periodična funkcija s periodom π.

Još neka važna svojstva trigonometrijskih funkcija

1. $$\left.\begin{aligned} sin(x \pm y) &= sin\,x\ cos\,y \pm cos\,x\ sin\,y \\ cos(x \pm y) &= cos\,x\ cos\,y \mp sin\,x\ sin\,y \end{aligned}\right\} \quad \textit{adicione formule}$$

2. $$tg(x \pm y) = \frac{tgx \pm tgy}{1 \mp tgx\,tgy}$$
$$ctg(x \pm y) = \frac{ctgx\,ctgy \mp 1}{ctgy \pm ctgx}$$

3. $sin^2 x + cos^2 x = 1$
4. $sin\,2x = 2\,sin\,x\,cos\,x$
5. $cos\,2x = cos^2 x - sin^2 x$
6. $sin\,x\,sin\,y = \frac{1}{2}\left[cos(x-y) - cos(x+y)\right]$
7. $cos\,x\,cos\,y = \frac{1}{2}\left[cos(x-y) + cos(x+y)\right]$
8. $sin\,x\,cos\,y = \frac{1}{2}\left[sin(x-y) + sin(x+y)\right]$
9. $sin\,x + sin\,y = 2\,sin\frac{x+y}{2}cos\frac{x-y}{2}$
10. $sin\,x - sin\,y = 2\,cos\frac{x+y}{2}sin\frac{x-y}{2}$

11. $\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$

12. $\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

Ciklometrijske funkcije

Arkussinus

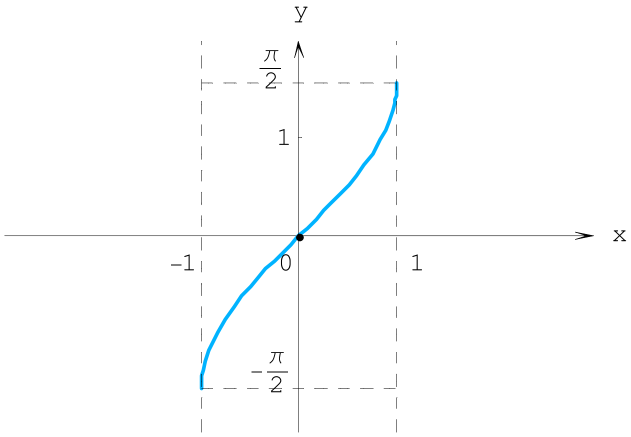
Promatramo restrikciju funkcije $f(x) = \sin x$ na interval $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$:

$$Sin = \sin\big|_{\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]} : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1].$$

Funkcija *Sin* je strogo rastuća bijekcija. Definiramo njenu inverznu funkciju sa:

$$\underline{\arcsin = Sin^{-1} : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].}$$

Graf funkcije $y = \arcsin x$



Dakle,

$$\sin(\arcsin x) = x, \quad |x| \le 1,$$

$$\arcsin(\sin x) = x, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Napomena: Uočimo da je funkcija $f(x) = \sin x$ strogo monotona na svakom od intervala $\left[-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right], k \in Z$ i da se svaki od njih preslikava na interval $[-1,1]$. Dakle, na svakom bi se od njih mogla definirati pripadna inverzna funkcija i sve bi te funkcije bile međusobno različite.

Arkuskosinus

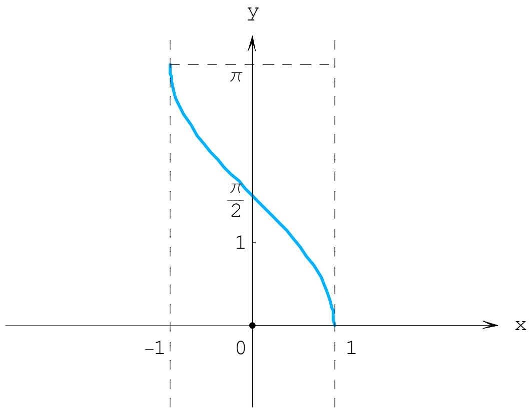
Promatramo restrikciju funkcije $f(x) = \cos x$ na interval $[0,\pi]$:

$Cos = cos|_{[0,\pi]} : [0,\pi] \to [-1,1]$.

Funkcija Cos je strogo padajuća bijekcija. Definiramo njenu inverznu funkciju sa:

$\arccos = Cos^{-1} : [-1,1] \to [0,\pi]$.

Graf funkcije $y = \arccos x$



Dakle, $\begin{aligned} &\cos(\arccos x) = x, \quad |x| \le 1, \\ &\arccos(\cos x) = x, \quad x \in [0,\pi]. \end{aligned}$

Vrijedi napomena kao i u prethodnom slučaju.

Arkustangens

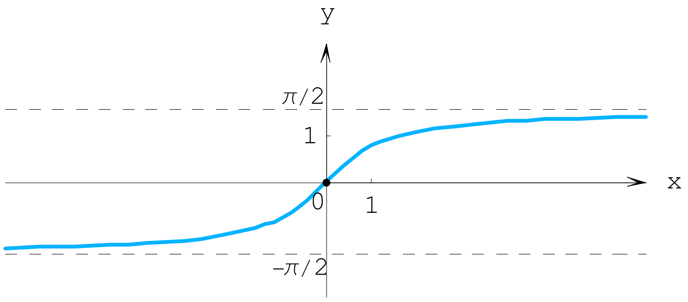
Promatramo restrikciju funkcije $f(x) = tgx$ na interval $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$:

$Tg = tg|_{\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)} : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to R$.

Funkcija Tg je strogo rastuća bijekcija. Definiramo njenu inverznu funkciju sa:

$arc\,tg = Tg^{-1} : R \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Graf funkcije $y = arctg\, x$



$$tg\left(arctgx\right) = x, \quad \forall x \in R,$$

Dakle,

$$arctg\left(tgx\right) = x, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Arkuskotangens

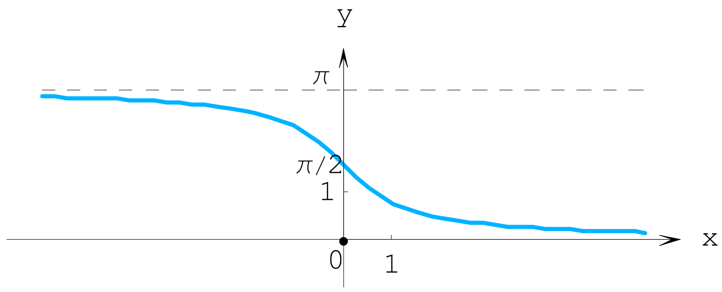
Promatramo restrikciju funkcije $f\left(x\right) = ctgx$ na interval $\left(0,\pi\right)$:

$Ctg = c\,tg\big|_{(0,\pi)} : \left(0,\pi\right) \to R$.

Funkcija *Ctg* je strogo padajuća bijekcija. Definiramo njenu inverznu funkciju sa:

$\underline{arc\,ctg = Ctg^{-1} : R \to \left(0,\pi\right)}$.

Graf funkcije $y = arcctg\, x$



Dakle,

$$ctg\left(arcctgx\right) = x, \quad \forall x \in R,$$

$$arcctg\left(ctgx\right) = x, \quad x \in \left(0,\pi\right).$$

Hiperbolne funkcije

Sinus hiperbolni

Oznaka: *sh*

$$shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad sh : R \to R$$

Svojstva:

1. $sh\, 0 = 0$,
2. $sh\left(-x\right) = -sh\left(x\right)$,
   tj. *sh* je neparna funkcija,
3. *sh* je strogo rastuća bijekcija.

Kosinus hiperbolni

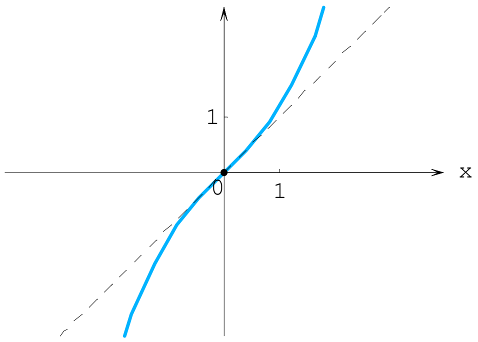
Oznaka: *ch*

$$chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad ch : R \to \left[1,+\infty\right)$$

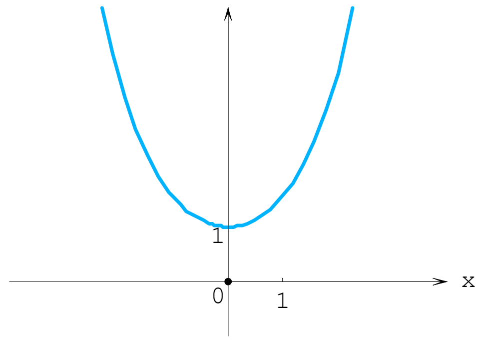
Svojstva:

1. $ch\, 0 = 1$,
2. $ch\left(-x\right) = ch\left(x\right)$,
   tj. *ch* je parna funkcija,
3. *ch* strogo raste na intervalu $\left[0,+\infty\right)$,
   ch strogo pada na intervalu $\left(-\infty,0\right]$,
4. *ch* je surjektivna funkcija.

Graf funkcije $y = shx$:



Graf funkcije $y = chx$:



Tangens hiperbolni

Oznaka: *th*

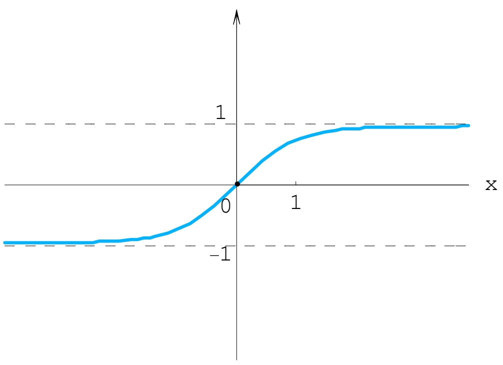
$$thx = \frac{shx}{chx} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},$$

$$th : R \to (-1,1)$$

Svojstva:

1. $th(-x) = -th(x)$,
   tj. *th* je parna funkcija,
2. *th* je strogo rastuća bijekcija.

Graf funkcije $y = thx$:



Kotangens hiperbolni

Oznaka: *cth*

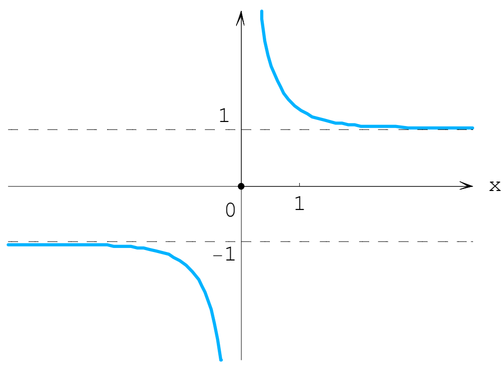
$$cthx = \frac{chx}{shx} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}},$$

$$cth : R \setminus \{0\} \to R \setminus [-1,1]$$

Svojstva:

1. $cth(-x) = -cth(x)$,
   tj. *cth* je parna funkcija,
2. *cth* je strogo padajuća bijekcija.

Graf funkcije $y = cthx$:



Još neka svojstva hiperbolnih funkcija

1. $$\left.\begin{aligned} sh(x \pm y) &= shx\,chy \pm chx\,shy \\ ch(x \pm y) &= chx\,chy \pm shx\,shy \end{aligned}\right\} \quad \textit{adicione formule}$$

2. $$th(x \pm y) = \frac{thx \pm thy}{1 \pm thx\,thy}$$

3. $cth(x \pm y) = \dfrac{1 \pm cthx\, cthy}{cthx \pm cthy}$
4. $ch^2x - sh^2x = 1$
5. $sh2x = 2shx\, chx$
6. $ch2x = ch^2x + sh^2x$
7. $th2x = \dfrac{2thx}{1 + th^2x}$
8. $cth2x = \dfrac{1 + cth^2x}{2cthx}$
9. $shx\, shy = \dfrac{1}{2}\left[ch(x+y) - ch(x-y)\right]$
10. $chx\, chy = \dfrac{1}{2}\left[ch(x+y) + ch(x-y)\right]$

Area funkcije

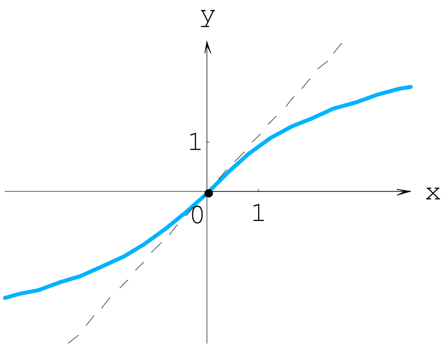
Area funkcije su inverzne funkcije hiperbolnih funkcija.

Area sinus hiperbolni

Oznaka: *Arsh*

$Arsh = sh^{-1} : R \longrightarrow R$

Graf funkcije $y = Arshx$:



Izvod formule za *Arsh* kao inverzne funkcije od *sh*:

$$y = shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

$$2x = e^y - \frac{1}{e^y} \Big/ \cdot e^y$$

$$e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0$$

$$\left(e^y\right)_{1,2} = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 + 4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2 + 1}$$

Logaritmiranjem posljednje jednakosti i odabirom pozitivnog predznaka zbog područja definicije funkcije *ln*, slijedi

$$y = ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right), \text{ tj.}$$

$$\underline{Arshx = ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right).}$$

Area kosinus hiperbolni

Oznaka: *Arch*

Funkcija $f(x) = chx$ nije bijektivna (injektivna) funkcija, pa ćemo promatratu njenu restrikciju na interval $[0, +\infty)$:

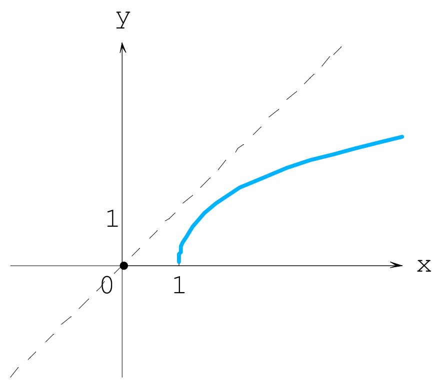
$$Ch = ch|_{[0,+\infty)} : [0, +\infty) \to [1, +\infty).$$

Funkcija *Ch* je strogo rastuća bijekcija.

Definiramo njenu inverznu funkciju:

$$Arch = Ch^{-1} : [1, +\infty) \to [0, +\infty).$$

Graf funkcije $y = Archx$:



Izvod formule za *Arch* kao inverzne funkcije od *Ch*:

$$y = Ch\,x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{e^y + e^{-y}}{2}$$

$$2x = e^y + \frac{1}{e^y} \Big/ \cdot e^y$$

$$e^{2y} - 2xe^y + 1 = 0$$

$$\left(e^y\right)_{1,2} = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 - 4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2 - 1}$$

Logaritmiranjem posljednje jednakosti i odabirom pozitivnog predznaka zbog područja definicije funkcije Ch^{-1}, tj. $x \geq 1,\ y \geq 0 \ \Rightarrow\ e^y \geq 1 \ \Rightarrow\ e^y = x + \sqrt{x^2-1}$, slijedi

$$y = ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right), \text{ tj.}$$

$$\underline{Archx = ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right).}$$

Analogno, za $Ch = ch\big|_{(-\infty,0]} : (-\infty,0] \to [1,+\infty)$ možemo definirati njenu inverznu funkciju $Arch = Ch^{-1} : [1,+\infty) \to (-\infty,0]$, sa $\underline{Archx = ln\left(x - \sqrt{x^2-1}\right)}$.

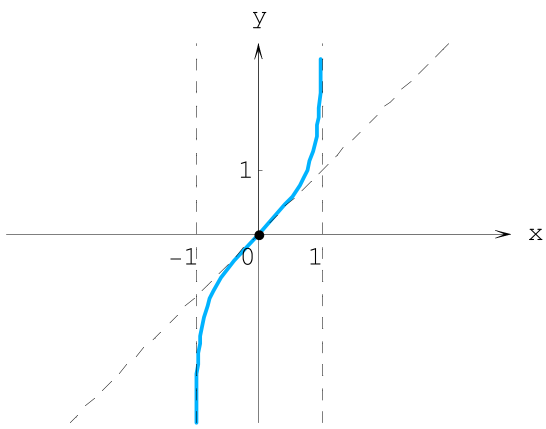
Area tangens hiperbolni

Oznaka: *Arth*

$th : R \longrightarrow (-1, 1)$

$Arth = th^{-1} : (-1, 1)$□R

Graf funkcije $y = Arthx$:



Izvod formule za *Arth* kao inverzne funkcije od *th*:

$$y = thx = \frac{shx}{chx} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}$$

$$x\left(e^y + \frac{1}{e^y}\right) = e^y - \frac{1}{e^y} \Big/ \cdot e^y$$

$$x\left(e^{2y}+1\right) = e^{2y} - 1$$

$$e^{2y}\left(x-1\right) = -\left(1+x\right)$$

$$e^{2y} = \frac{1+x}{1-x}$$

Logaritmiranjem posljednje jednakosti slijedi

$$2y = ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \text{ tj.}$$

$$\underline{Arthx = \frac{1}{2}ln\frac{1+x}{1-x} = ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}, \qquad (|x| < 1).$$

Area kotangens hiperbolni

Oznaka: *Arcth*

$cth : R \setminus \{0\} \longrightarrow R \setminus [-1, 1]$

$Arcth = cth^{-1} : R \setminus [-1, 1] \longrightarrow R \setminus \{0\}$

Izvod formule za *Arcth* kao inverzne funkcije od *cth*:

$$y = cthx = \frac{chx}{shx} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{e^y + e^{-y}}{e^y - e^{-y}}$$

$$x\left(e^y - \frac{1}{e^y}\right) = e^y + \frac{1}{e^y} \Big/ \cdot e^y$$

$$x\left(e^{2y} - 1\right) = e^{2y} + 1$$

$$e^{2y}\left(x - 1\right) = x + 1$$

$$e^{2y} = \frac{x+1}{x-1}$$

Logaritmiranjem posljednje jednakosti slijedi

$$2y = ln\frac{x+1}{x-1}, \text{ tj.}$$

$$\underline{Arcthx = \frac{1}{2}ln\frac{x+1}{x-1} = ln\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}, \qquad (|x| > 1).$$

Graf funkcije $y = Arcthx$: