# 8. NIZOVI

## Pojam niza

Neka je $N$ skup prirodnih brojeva. Prema nekom pravilu svaki broj iz $N$ zamijenimo nekim brojem:

$$a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n, \ldots\ldots \in R.$$

Šta smo dobili?
Budući da je svakom elementu skupa $N$ pridružen samo jedan element skupa $R$, zaključujemo da se radi o funkciji sa $N$ u $R$.

**Definicija**
Niz je <u>funkcija</u> $f : N \to R$.

$f(1) = a_1$ - prvi član niza
$f(2) = a_n$ - drugi član niza
$\vdots$
$f(n) = a_n$ - $n$ – ti ili opći član niza

Oznaka: $(a_n)_{n\in N}$ ili samo $(a_n)$.

*Primjeri*:

1. Neka je formulom (funkcijom) $f(n) = \dfrac{2n-1}{n}$ zadan niz realnih brojeva. Napisati prvih nekoliko članova niza.

   Rješenje:

   $f(1) = a_1 = 1, \quad f(2) = a_2 = \dfrac{3}{2}, \quad f(3) = a_3 = \dfrac{5}{3}, \ \ldots\ldots$

   $(a_n)$: $1, \dfrac{3}{2}, \dfrac{5}{3}, \dfrac{7}{4}, \dfrac{9}{5}, \ldots\ldots, \dfrac{2n-1}{n}, \ldots$

2. Napisati nekoliko prvih članova niza ako je opći član:

   a) $a_n = \dfrac{n^2}{2n+1} \ \Rightarrow \ (a_n): \dfrac{1}{3}, \dfrac{4}{5}, \dfrac{9}{7}, \dfrac{16}{9}, \ldots$

   b) $b_n = (-1)^n \ \Rightarrow \ (b_n):$

   c) $c_n = \dfrac{n}{n+1} \ \Rightarrow \ (c_n):$

   d) $d_n = (-1)^n \dfrac{1}{n} \ \Rightarrow \ (d_n):$

e) $e_n = \dfrac{1}{n} \Rightarrow (e_n)$:

f) $f_n = \dfrac{3n+1}{n^2+1} \Rightarrow (f_n)$:

g) $g_n = 3 \Rightarrow (g_n)$:

3. Odrediti opći član niza ako je prvih nekoliko članova niza:
   a) 1, 4, 7, 10, 13, …
   b) –1, 2, 7, 14, 23, …

   Napomena: Pomoću nekoliko zadanih početnih članova niza sam niz nije jednoznačno određen, ali se može pretpostaviti njegov opći član.

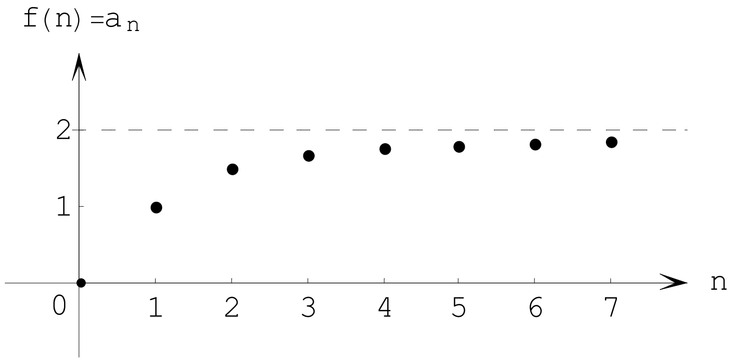
**Grafički prikaz niza**

1. način
Budući da je niz funkcija, promatramo parove $(n, f(n))$, tj. skup točaka ravnine koji pripada grafu zadane funkcije

$$G_f = \{(n, f(n)) \mid n \in N\}.$$

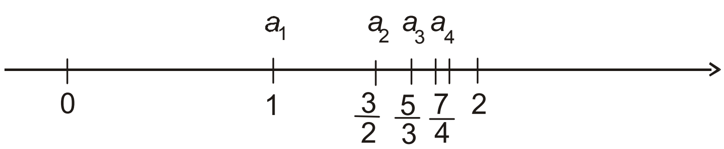
Grafički prikaz niza iz primjera 1:

$$f(n) = \frac{2n-1}{n}; \qquad (a_n): 1, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \frac{9}{5}, \ldots\ldots, \frac{2n-1}{n}, \ldots$$




2. način
Prikaz niza na brojevnom pravcu:

$$f(n) = \frac{2n-1}{n}; \qquad (a_n): 1, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \frac{9}{5}, \ldots\ldots, \frac{2n-1}{n} = 2 - \frac{1}{n}, \ldots$$



## Ograđeni nizovi, monotoni nizovi

Neka je zadan niz $(a_n)$ realnih brojeva.
Što čine njegovi članovi?
$\longrightarrow$ Podskup skupa realnih brojeva.
Pitamo se da li je taj skup brojeva ograđen (omeđen).

**Definicija (ograđenost)**
Za niz realnih brojeva $(a_n)_{n\in N}$ kažemo da je ograđen ako je skup $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ ograđen, tj. ako

$$\exists M, m \in R, \qquad m \le a_n \le M, \qquad \forall n \in N.$$

Tada je:
$M$ – gornja ograda niza $(a_n)$,
$m$ – donja ograda niza $(a_n)$.

**Definicija (monotonost)**
Niz $(a_n)$ realnih brojeva je *rastući* ako je $a_n \le a_{n+1}, \ \forall n \in N$.
Niz $(a_n)$ realnih brojeva je *padajući* ako je $a_n \ge a_{n+1}, \ \forall n \in N$.
Analogno,
Niz $(a_n)$ realnih brojeva je *strogo rastući* ako je $a_n < a_{n+1}, \ \forall n \in N$.
Niz $(a_n)$ realnih brojeva je *strogo padajući* ako je $a_n > a_{n+1}, \ \forall n \in N$.

Sve su to monotoni nizovi.

Za monotone rastuće nizove vrijedi $a_{n+1} - a_n \ge 0$, odnosno $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \ge 1$.

Za monotone padajuće nizove vrijedi $a_{n+1} - a_n \le 0$, odnosno $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \le 1$.

*Zadatak.* Ispitati monotonost sljedećih nizova zadanih općim članom:

a) $a_n = \dfrac{2n-1}{n}$

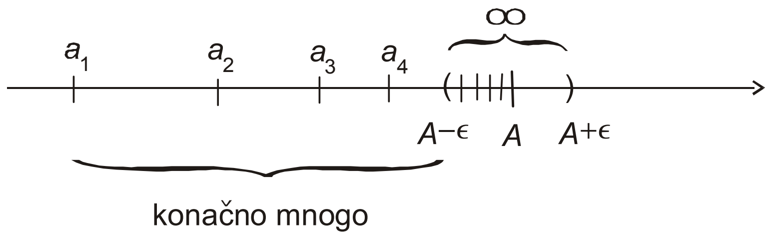
b) $b_n = (-1)^n$

c) $c_n = (-1)^n \dfrac{1}{n}$

**Definicije**

- Svaku funkciju $f : S_n \to R$, $S_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ zovemo *konačnim nizom* u *R*.
- *Okolina* realnog broja je svaki otvoreni interval realnih brojeva koji sadrži taj broj. (Na primjer, nekoliko okolina broja 1: (0, 2), (0.9, 1.1),…)
- $\varepsilon$ *- okolina* broja *A* je otvoreni interval $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$, $\varepsilon \in R, \varepsilon > 0$.

– Realan broj $A$ je *gomilište niza* $\left(a_n\right)_{n\in N}$ ako svaka $\varepsilon$ - okolina broja $A$ sadrži beskonačno mnogo članova tog niza.




## Granična vrijednost ili limes niza

**Definicija 1**
Postoji li točka $A$ takva da se u svakoj njezinoj $\varepsilon$ - okolini nalaze gotovo svi članovi niza $(a_n)$, kažemo da je niz $(a_n)$ *konvergentan* i da je $A$ *limes* ili *granica* tog niza.

Pišemo: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$,
Čitamo: "Limes od $a_n$, kad $n$ teži u beskonačno, je $A$."

Vrijedi: Ako je niz konvergentan, onda je limes tog niza njegovo jedino gomilište.

**Definicija 2**
Broj $A$ zovemo *graničnom vrijednošću* ili *limesom* niza $(a_n)$ ako za svaki pozitivan broj $\varepsilon$ možemo naći takav prirodan broj $n_0\left(\varepsilon\right)$, da za sve članove niza, indeksi kojih su veći od $n_0\left(\varepsilon\right)$, vrijedi $\left|a_n - A\right| < \varepsilon$.
Ako broj $A$ postoji niz zovemo *konvergentnim.*

Definicija 2 zapisana formulom:
$$\left(\forall\varepsilon > 0\right)\left(\exists\, n_0 \in N\right)\left(\, n > n_0 \Rightarrow \left|a_n - A\right| < \varepsilon\,\right).$$

*Primjer*. Provjera konvergencije niza.
Neka je dan niz s općim članom $a_n = \dfrac{2n-1}{n}$, tj. $(a_n)$: $1, \dfrac{3}{2}, \dfrac{5}{3}, \dfrac{7}{4}, \dfrac{9}{5}, \ldots\ldots, \dfrac{2n-1}{n}, \ldots$
(Vidi grafički prikaz na stani 86.)
Odaberimo neki (po volji mali) pozitivni broj $\varepsilon$ $\left(\varepsilon > 0\right)$. Uvijek postoje članovi niza čija je udaljenost od broja 2 manja od tog broja. Na primjer,
$$n = 100 \;\;\Rightarrow\;\; a_n = \frac{2\cdot 100 - 1}{100} = \frac{199}{100} = 2 - \frac{1}{100}$$
Uzmimo $\varepsilon = \dfrac{1}{100}$ $\Rightarrow$ svi sljedeći članovi niza, $a_{n+1}$, $a_{n+2}$, $\ldots$su na udaljenosti manjoj od $\varepsilon = \dfrac{1}{100}$ od broja 2.

$n = 1000 \;\Rightarrow\; a_n = \dfrac{2\cdot 1000-1}{1000} = \dfrac{1999}{1000} = 2-\dfrac{1}{1000}$, itd.

Pišemo: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n-1}{n} = 2$.

*Divergentni* nizovi su nizovi koji nisu konvergentni.
Niz je *divergentan u užem smislu*, ako je ispunjeno: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ ili $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.
Niz je *divergentan u širem smislu* ako je divergentan a nije divergentan u užem smislu.
Na primjer, niz s općim članom $a_n = \dfrac{1+(-1)^n}{2}$, $(a_n)$: $0,1,0,1,0,\ldots\ldots$, divergira u širem smislu jer ima dva gomilišta, 0 i 1.

## Svojstva konvergentnih nizova

**Teorem 1**
Konvergentan niz ima samo jedan limes, tj. ako je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = B$, tada je $A = B$.

**Dokaz**
Pretpostavimo da je ispunjeno: $A \neq B$ i $\varepsilon = \dfrac{1}{3}|A-B| > 0$.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \;\Rightarrow\; (\exists n_1)(\forall n > n_1)\, |a_n - A| < \varepsilon$$
$$\lim_{n\to\infty} a_n = B \;\Rightarrow\; (\exists n_2)(\forall n > n_2)\, |a_n - B| < \varepsilon$$

Označimo: $n_0 = max\{n_1, n_2\}$.
Budući da gornje dvije jednakosti vrijede za $\forall n > n_0$, slijedi

$$|A-B| = |(A-a_n)+(a_n-B)| \le |A-a_n| + |a_n-B| =$$
$$= |a_n-A| + |a_n-B| < \varepsilon+\varepsilon = 2\,\varepsilon = 2\cdot\frac{1}{3}|A-B| \quad / : |A-B|$$
$$\Rightarrow\; 1 < \frac{2}{3}, \text{ što je nemoguće. Dakle, } A = B. \;\Box$$

**Teorem 2**
Konvergentan niz je ograđen.

**Dokaz**
$(a_n)$ je konvergentan niz $\Rightarrow\; \exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$.
Odaberimo li $\varepsilon = 1 \Rightarrow \exists n_0$, takav da je

$$(\forall n > n_0) \;\Rightarrow\; |a_n - A| < 1, \text{ tj.}$$
$$-1 < a_n - A < 1 \qquad \Rightarrow \qquad \underline{A-1 < a_n < A+1} \qquad (1)$$

Označimo: $K = max\left\{|a_1|,|a_2|,\ldots,|a_{n_0}|\right\},\ \left(n \le n_0\right)$ , tj.

$$|a_1| \le K,\quad |a_2| \le K,\ldots\ldots,|a_{n_0}| \le K$$

$$\underline{-K \le a_1 \le K,\quad -K \le a_2 \le K,\ldots\ldots,-K \le a_{n_0} \le K} \qquad (2)$$

Označimo dalje: $M = max\left\{K, A+1\right\}$ i $m = min\left\{-K, A-1\right\}$.

Iz (1) i (2) slijedi: $m \le a_n \le M,\quad \forall n \in N$, što je i trebalo dokazati. □

**Teorem 3**
Ograđen i monoton niz je konvergentan.

**Dokaz**
Neka je monoton ograđen niz uzlazan.
Kako je niz ograđen postoji njegov supremum i u svakoj okolini supremuma ima članova niza. U protivnom bi sami rub okoline bio supremum niza, i ponovili bismo gornju tvrdnju. Ako u okolini supremuma postoji jedan član niza, zbog uzlaznosti niza su gotovo svi članovi niza u toj okolini. Dakle, u svakoj su okolini gotovo svi članovi niza i niz je konvergentan, odakle slijedi da mu je limes supremum.
Analogno za silazne nizove, limes im je infimum. □

**Teorem 4** (Teorem o sendviču)
Ako su nizovi ($a_n$), ($b_n$) i ($c_n$) takvi da je $a_n \le b_n \le c_n$ za svaki $n$ veći od nekog $n_0$ i osim toga je je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$, onda konvergira i niz ($b_n$) i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$.

**Dokaz**
Neka je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = A$.

Tada,

$$\left(\forall \varepsilon > 0\right)\left(\exists\, n_1, n_2 \in N\right)\begin{cases}\forall n > n_1\left(\varepsilon\right) \Rightarrow |a_n - A| < \varepsilon \\ \forall n > n_2\left(\varepsilon\right) \Rightarrow |c_n - A| < \varepsilon\end{cases}.$$

Odnosno,

$$\begin{array}{ccc} \forall n > n_1 & & \forall n > n_2 \\ -\varepsilon < a_n - A < \varepsilon & \text{i} & -\varepsilon < c_n - A < \varepsilon \\ A-\varepsilon < a_n < A+\varepsilon & & A-\varepsilon < c_n < A+\varepsilon \end{array}$$

Označimo sa $n_3 = max\left\{n_1, n_2\right\}$.

Slijedi:

$$\forall n > n_3 \quad \Rightarrow \quad A-\varepsilon < a_n \le b_n \le c_n < A+\varepsilon, \text{ tj.}$$

$$A-\varepsilon < b_n < A+\varepsilon, \text{ tj.}$$

$$\left(\forall \varepsilon > 0\right)\left(\forall n > n_3\right) \quad |b_n - A| < \varepsilon, \text{ tj.}$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = A. \ \square$$

**Teorem 5** (Računanje s limesima)
Neka su $(a_n)$ i $(b_n)$ konvergentni nizovi realnih brojeva i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$. Tada je:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n = A \pm B$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = A \cdot B$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right) = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \dfrac{A}{B}$, $\quad B \neq 0$ i $b_n \neq 0, \forall n \in N$;

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = \left|\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right| = |A|$;

(5) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{\,k} = \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)^k = A^k$, $\quad a_n \neq 0,\ A > 0,\ k \in R$;

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{\lim\limits_{n\to\infty} a_n} = \sqrt[k]{A}$.

**Dokaz**
Dokazat ćemo samo prvo svojstvo, tj. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = A + B$, što napisano formulom glasi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in N)\ \left(n > n_0(\varepsilon) \Rightarrow |(a_n + b_n) - (A + B)| < \varepsilon\right).$$

Po pretpostavci je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \ \Rightarrow\ \text{za } \frac{\varepsilon}{2}\ \exists n_1(\varepsilon), (\forall n > n_1) \Rightarrow |a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{3}$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = B \ \Rightarrow\ \text{za } \frac{\varepsilon}{2}\ \exists n_2(\varepsilon), (\forall n > n_2) \Rightarrow |b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4}$$

Označimo: $\quad n_0 = max\{n_1, n_2\}$.

Iz (3) i (4) slijedi:

$(\forall n > n_0) \ \Rightarrow\ |(a_n + b_n) - (A + B)| = |(a_n - A) + (b_n - B)| \leq |a_n - A| + |b_n - B| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. □

## Neki važniji limesi

1. Niz s općim članom $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$; $\quad (a_n): 2, \left(1 + \dfrac{1}{2}\right)^2, \left(1 + \dfrac{1}{3}\right)^3, \ldots\ldots$

   Dokažimo da je tako zadani niz konvergentan.

   1°) Kao prvo pokažimo da je niz strogo rastući.
   Bernoullijeva nejednakost:

$$(1 - \alpha)^m \geq 1 + m\alpha, \qquad \alpha > -1,\ m \in N$$

$$(1 - \alpha)^m > 1 + m\alpha, \qquad \alpha > -1,\ m > 1$$

Stavimo: $\alpha = \dfrac{1}{n+1}, \quad m = \dfrac{n+1}{n}$

Slijedi: $\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{n}} > 1 + \dfrac{n+1}{n}\cdot\dfrac{1}{n+1} = 1+\dfrac{1}{n} \Big/ ^{n}$

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{a_{n+1} > a_n}\ .$$

2°) Niz s općim članom $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ je ograđen.

Budući da je niz uzlazan dovoljno je pokazati postojanje gornje ograde.

Bernoullijeva nejednakost za $\alpha = 1$ i $m = 1+\dfrac{2}{n}$ glasi:

$$(1+1)^{1+\frac{2}{n}} > 1 + 1\cdot\left(1+\frac{2}{n}\right) = 2+\frac{2}{n}\ . \tag{5}$$

Raspišimo: $4^{\frac{1}{n}} = 2^{\frac{2}{n}} = 2^{\frac{2}{n}}\cdot\dfrac{2}{2} = \dfrac{1}{2}\left(2^{1+\frac{2}{n}}\right) = \dfrac{1}{2}(1+1)^{1+\frac{2}{n}}$ (6)

Usporedbom (5) i (6) slijedi da je

$$\underline{4 > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = a_n}, \quad a_n \geq a_1 > 0, \text{ pa je niz i ograđen.}$$

Prema teoremu 3, niz je konvergentan. Označimo njegov limes sa *e*, tj. $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e}$,

($e = 2.718281828\ldots$).

2. $a_n = \dfrac{1}{n}$; $(a_n): 1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \ldots\ldots, \dfrac{1}{n}, \ldots$ *Harmonijski niz*

   $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} = 0}$.

3. $a_n = a^n$, $a \in R$; $(a_n): a, a^2, a^3, a^4, \ldots\ldots, a^n, \ldots$
   - $|a| < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$ niz konvergira
   - $|a| > 1 \Rightarrow$ niz divergira
   - $a = 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a^n = 1$ niz konvergira
   - $a = -1 \Rightarrow$ niz $(a_n)$: -1, 1, -1, 1, ... divergira

4. $a_n = \sqrt[n]{n}$; $(a_n): 1, \sqrt[2]{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4}, \ldots\ldots, \sqrt[n]{n}, \ldots$

   $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1}$.

5. $a_n = \sqrt[n]{a}$; $\quad (a_n): a, \sqrt[2]{a}, \sqrt[3]{a}, \sqrt[4]{a}, \ldots\ldots, \sqrt[n]{a}, \ldots$

$$\underline{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1}.$$

*Zadatak.* Izračunati limese zadanih nizova.

a) $a_n = \dfrac{n}{n+1}$,

b) $b_n = \dfrac{5n-2}{n^2-2n+6}$.

## Aritmetički i geometrijski niz

### Aritmetički niz ili *A*-niz

*A*-niz: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$

| | |
|---|---|
| $a_1$ | prvi član niza |
| $a_2 = a_1 + d$, | drugi član niza |
| $a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d$ | treći član niza |
| $\vdots$ | |
| $a_n = a_{n-1} + d = a_1 + (n-1)d$, | $n$-ti član niza |
| $\vdots$ | |

$\Rightarrow d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \ldots\ldots = a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n = \ldots$

$d$ – diferencija ili razlika

$\Rightarrow 2a_n = a_{n-1} + a_{n+1}$, tj.

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

Dakle, svaki član *A*-niza jednak je aritmetičkoj sredini susjednih članova.

Suma prvih $n$ članova *A*-niza:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \ldots + (a_1 + (n-1)d) = \\ = n \cdot a_1 + \frac{n(n-1)}{2} d = \ldots = \frac{n}{2}(a_1 + a_n), \text{ tj.}$$

$$S_n = n\frac{(a_1 + a_n)}{2}.$$

### Geometrijski niz ili *G*-niz

| | |
|---|---|
| $b_1$ | prvi član niza |
| $b_2 = b_1 q$, | drugi član niza |

$b_3 = b_2 q = b_1 q^2$ treći član niza

$\vdots$

$b_n = b_{n-1} q = b_1 q^{n-1}$, $n$-ti član niza

$\vdots$

---

$$\Rightarrow \; q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{b_3}{b_2} = \ldots\ldots = \frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{b_{n+1}}{b_n} = \ldots$$

$q$ – kvocijent

$\Rightarrow \; b_n^{\;2} = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$, tj.

$b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$ .

Dakle, svaki član $G$-niza jednak je geometrijskoj sredini susjednih članova.

Suma prvih $n$ članova $G$-niza:

$$\begin{aligned} s_n &= b_1 + b_2 + \ldots + b_n = b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + \ldots + b_1 q^{n-1} \,/\cdot q \\ \underline{s_n \cdot q} &= \underline{\quad b_1 q + b_1 q^2 + b_1 q^3 + \ldots + b_1 q^n} \quad / - \end{aligned}$$

$$s_n - s_n q = s_n (1-q) = b_1 - b_1 q^n = b_1 (1 - q^n)$$

$$\Rightarrow \underline{s_n = b_1 \frac{1-q^n}{1-q}}$$

Suma svih članova $G$-niza:

$$\text{Za } |q| < 1 \;\Rightarrow\; s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} b_1 \frac{1-q^n}{1-q} = \underline{b_1 \frac{1}{1-q}} .$$