Ispitna zadaća 9:

1. Riješiti sustav jednadžbi $\begin{array}{l} z_1 + \bar{z}_2 = 1 + 2i \\ 2 + iz_1 + \dfrac{z_2}{i} = 0 \end{array}$, ako je $Im(z_2) = -\dfrac{6+\sqrt{6}}{2}$.

2. Zadan je trokut osnovice a, s šiljastim kutovima na toj osnovici, i visine h. U trokut upisati pravokutnik maksimalne površine kojemu jedna stranica leži na osnovici a.

3. Odrediti domenu funkcije $f(x) = ln\left(e + \dfrac{1}{x}\right)$ i napisati jednadžbu tangente na tu krivulju u njenom sjecištu s osi x.

4. Odrediti domenu, presjeke s koordinatnim osima, ekstreme, asimptote i skicirati graf funkcije $y = \dfrac{\sqrt{x^2 - x}}{4x - 3}$.

5. Može li se konstanta a tako odabrati da funkcija $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \le 1 \\ 3 - ax^2, & x > 1 \end{cases}$ bude neprekidna u $x = 1$? Ako je to moguće, ispitati da li je funkcija $f(x)$ diferencijabilna u toj točki.

6. Naći točku ravnine $2x - 3y - z + 1 = 0$ jednako udaljenu od točaka $A(2,3,0)$, $B(4,2,0)$ i $C(1,0,0)$.

Rješenja:

1. Riješiti sustav jednadžbi $\begin{array}{l} z_1 + \bar{z}_2 = 1 + 2i \\ 2 + iz_1 + \dfrac{z_2}{i} = 0 \end{array}$, ako je $Im(z_2) = -\dfrac{6+\sqrt{6}}{2}$.

Rješenje:

$$z_1 = a + bi$$

$$z_2 = c - \frac{6+\sqrt{6}}{2} i$$

$$\bar{z}_2 = c + \frac{6+\sqrt{6}}{2} i$$

$$z_1 i = (a + bi)i = -b + ai$$

$$\frac{z_2}{i} = \frac{z_2}{i}\frac{i}{i} = \frac{z_2 i}{-1} = -\left(\frac{6+\sqrt{6}}{2} + ci\right)$$

$$a+bi+c+\frac{6+\sqrt{6}}{2}i=1+2i$$
$$2-b+ai-\frac{6+\sqrt{6}}{2}-ci=0$$

$$(a+c)+(b+\frac{6+\sqrt{6}}{2})i=1+2i$$
$$(2-b-\frac{6+\sqrt{6}}{2})+(a-c)i=0$$

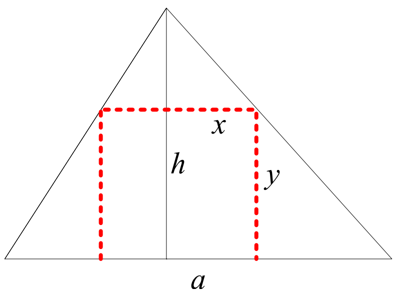
$$a+c=1$$
$$b+\frac{6+\sqrt{6}}{2}=2$$
$$2-b-\frac{6+\sqrt{6}}{2}=0$$
$$a-c=0$$

$$a=\frac{1}{2}, b=-\frac{2+\sqrt{6}}{2}, c=\frac{1}{2}$$

$$z_1=\frac{1}{2}-\frac{2+\sqrt{6}}{2}i$$
$$z_2=\frac{1}{2}-\frac{6+\sqrt{6}}{2}i \ \square$$

2. Zadan je trokut osnovice a, s šiljastim kutovima na toj osnovici, i visine h. U trokut upisati pravokutnik maksimalne površine kojemu jedna stranica leži na osnovici a.

Rješenje:



$$a:h=x:(h-y)$$
$$x=\frac{a(h-y)}{h}$$

$$P=x\cdot y$$
$$P=\frac{a(h-y)}{h}y$$

$$P'(y)=\frac{a}{h}(h-2y)$$

$$P'(y)=0 \;\Rightarrow\; 2y=h \;\Rightarrow\; y=\frac{h}{2},\quad x=\frac{a}{2}$$

$$P=\frac{a}{2}\cdot\frac{h}{2}=\frac{ah}{4}\;\square$$

3. Odrediti domenu funkcije $f(x)=ln\left(e+\frac{1}{x}\right)$ i napisati jednadžbu tangente na tu krivulju u njenom sjecištu s osi *x*.

Rješenje:

Domena: $\left(e+\frac{1}{x}\right)>0 \;\Rightarrow\; D=\left\langle -\infty,-\frac{1}{e}\right\rangle \cup \left\langle 0,+\infty\right\rangle$

Sjecište s osi *x*:

$$y=0 \;\Rightarrow\; ln\left(e+\frac{1}{x}\right)=0$$

$$e+\frac{1}{x}=e^0$$

$$e+\frac{1}{x}=1 \;\Rightarrow\; x=\frac{1}{1-e} \;\Rightarrow\; T\left(\frac{1}{1-e},0\right)$$

Jednadžba tangente:

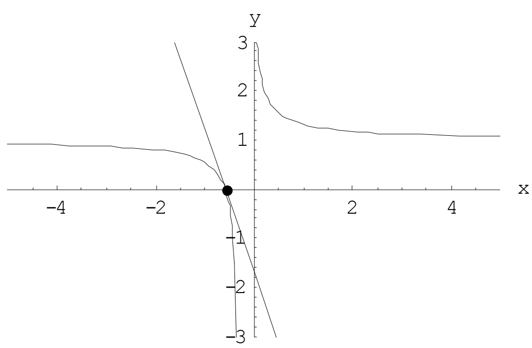
$$y'=-\frac{1}{x(ex+1)}$$

$$k_t=y'\left(\frac{1}{1-e}\right)=\frac{e-1}{ex+1}$$

$$y-y_0=k_t(x-x_0)$$

$$y-0=\frac{e-1}{ex+1}\left(x-\frac{1}{1-e}\right)$$

$$y=-(1-e)^2x+(1-e)$$



$\square$

4. Odrediti domenu, presjeke s koordinatnim osima, ekstreme, asimptote i skicirati graf funkcije $y = \dfrac{\sqrt{x^2 - x}}{4x - 3}$.

Rješenje:

a) Domena:

$$4x - 3 \neq 0 \qquad \& \qquad -x + x^2 \geq 0$$

$$x \neq \frac{3}{4} \qquad\qquad x(-1 + x) \geq 0$$

$$x \in \langle -\infty, 0] \cup [1, \infty\rangle$$

$$D = R \setminus \langle 0,1 \rangle$$

b) Parnost, neparnost: Nije parna ni neparna (domena nije simetrična prema ishodištu).

c) Nul točke: $y = 0 \;\Rightarrow\; -x + x^2 = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = 0,\; x_2 = 1$

Presjeci s osi y: $x = 0 \;\Rightarrow\; y = 0$

d) Ekstremi:

$$f'(x) = \frac{-1 + 2x}{2(-3 + 4x)\sqrt{-x + x^2}} - \frac{4\sqrt{-x + x^2}}{(-3 + 4x)^2}, \quad f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{3}{2}$$

x	$-\infty$	0	1	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
y	↗	P	↗	M	↘
y'	+		+		-

$$\Rightarrow \quad M\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$$

a) Asimptote:

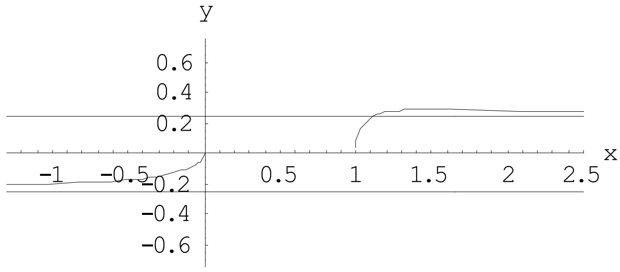
$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2 - x} \;/ : x}{4x - 3 \;/ : x} = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2 - x}}{4x - 3} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x} \;/ : x}{-4x - 3 \;/ : x} - \frac{1}{4}$$

Horizontalne asimptote: $y = \dfrac{1}{4}, \quad y = -\dfrac{1}{4}$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \qquad \Rightarrow \quad \text{nema kose asimptote}$$

b) Graf



□

5. Može li se konstanta a tako odabrati da funkcija $f(x)=\begin{cases} x+1, & x\le 1 \\ 3-ax^2, & x>1 \end{cases}$ bude neprekidna u $x=1$? Ako je to moguće, ispitati da li je funkcija $f(x)$ diferencijabilna u toj točki.

Rješenje:

Da bi funkcija bila neprekidna u točki $x=1$ mora biti:
$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=f(1)$.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(x+1)=2$$
$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\left(3-ax^2\right)=3-a$$

Funkcija će biti neprekidna ako je $3-a=2 \;\Rightarrow\; a=1$.

Za takav a funkcija postaje $f(x)=\begin{cases} x+1, & x\le 0 \\ 3-x^2, & x>0 \end{cases}$.

Derivacija funkcije u točki $x=1$:

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{(1+\Delta x+1)-(1+1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1$$

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\left(3-(1+\Delta x)^2\right)-\left(3-1^2\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}(-2-\Delta x)=-2$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}\neq\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x},$$

tj funkcija nije diferencijabilna u promatranoj točki.□

6. Naći točku ravnine $2x-3y-z+1=0$ jednako udaljenu od točaka $A(2,3,0)$, $B(4,2,0)$ i $C(1,0,0)$.

Rješenje:

Polovište dužine $\overline{CA}$ .... $P(\frac{3}{2},\frac{3}{2},0)$, $\overrightarrow{CA}=\vec{i}+3\vec{j}+0\vec{k}$

Polovište dužine $\overline{CB}$ .... $Q(\frac{5}{2},1,0)$, $\quad \overrightarrow{CB}=3\vec{i}+2\vec{j}+0\vec{k}$

Ravnina točkom P okomito na vektor $\overrightarrow{CA}$:

$$\alpha ...... 1(x-\frac{3}{2})+3(y-\frac{3}{2})=0 \Rightarrow x+3y-6=0$$

Ravnina točkom Q okomito na vektor $\overrightarrow{CB}$:

$$\beta ...... 3\left(x-\frac{5}{2}\right)+2(y-1)=0 \Rightarrow 6x+4y-19=0$$

<u>1. način</u>

Presjek ravnina α i β:

$$\vec{n}_1(\alpha)=\{1,3,0\}, \quad \vec{n}_2(\beta)=\{6,4,0\}$$

$$\vec{q}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 3 & 0\\ 6 & 4 & 0\end{vmatrix}=-14\vec{k}$$

$$\text{Za } z=0 \;\Rightarrow\; \begin{array}{c} x+3y-6=0\\ \underline{6x+4y-19=0}\end{array} \;\Rightarrow\; y=\frac{17}{14},\; x=\frac{33}{14} \;\Rightarrow\; Q\left(\frac{33}{14},\frac{17}{14},0\right)$$

$$q ...... \frac{x-\frac{33}{14}}{0}=\frac{y-\frac{17}{14}}{0}=\frac{z}{1}$$

Probodište pravca q i ravnine $2x-3y-z+1=0$:
Kako je pravac q paralelan sa z-osi, uvrstimo $x=\frac{33}{14}$, $\; y=\frac{17}{14}$ u jednadžbu ravnine.
Slijedi $z=\frac{29}{14}$, pa je tražena točka $T(\frac{33}{14},\frac{17}{14},\frac{29}{14})$.□

<u>2. način</u>

Tražena točka se može dobiti i kao presjek zadane ravnine, ravnine α i ravnine β, tj. kao rješenje sustava:

$$\begin{aligned} &2x-3y-z+1=0\\ &x+3y-6=0\\ &6x+4y-19=0 \text{ .□}\end{aligned}$$