Ispitna zadaća 10:

1. Matematičkom indukcijom dokazati da za $\forall a \in N \,\&\, \forall n \in N$ vrijedi:
$$\frac{1}{a(a+1)}+\frac{1}{(a+1)(a+2)}+\ldots+\frac{1}{(a+n-1)(a+n)}=\frac{n}{a(a+n)}.$$

2. Odrediti onaj član binomnog razvoja $(2x^2-\frac{1}{2}y^3)^8$ koji sadrži x^8.

3. Dana je funkcija $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{e^{x-1}}-\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ -\dfrac{1}{2}, & x=0\end{cases}$.

Pokazati da je $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\dfrac{1}{2}$ i izračunati $f'(x)$.

4. Ispitati funkciju $f(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}$ i nacrtati njen graf.

5. Odrediti koordinate vrhova pravokutnika maksimalne površine upisanog u figuru omeđenu krivuljama $y=|x-2|+2$ i $y=-x^2+4x+3$, tako da mu stranice budu paralelne s koordinatnim osima.

6. Pokazati da se pravci $\dfrac{x-3}{5}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-2}{4}$ i $\dfrac{x-8}{3}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-6}{-2}$ sijeku i odrediti njihovo sjecište.

Rješenja:

1. Matematičkom indukcijom dokazati da za $\forall a \in N \,\&\, \forall n \in N$ vrijedi:
$$\frac{1}{a(a+1)}+\frac{1}{(a+1)(a+2)}+\ldots+\frac{1}{(a+n-1)(a+n)}=\frac{n}{a(a+n)}.$$

Rješenje:

a) Baza indukcije:

$$n=1 \;\Rightarrow\; \frac{1}{a(a+1)}=\frac{1}{a(a+1)}$$

b) Korak indukcije. $n=k \;\Rightarrow\; n=k+1$
Pretpostavimo da tvrdnja vrjedi za $n=k$, tj.

$$\frac{1}{a(a+1)}+\frac{1}{(a+1)(a+2)}+...+\frac{1}{(a+k-1)(a+k)}=\frac{k}{a(a+k)}$$

Dokažimo da vrijedi za $n=k+1$:

$$\frac{1}{a(a+1)}+\frac{1}{(a+1)(a+2)}+...+\frac{1}{(a+k-1)(a+k)}+\frac{1}{(a+k)(a+k+1)}=\frac{k+1}{a(a+k+1)}$$

$$\frac{k}{a(a+k)}+\frac{1}{(a+k)(a+k+1)}=$$

$$\frac{k(a+k+1)+a}{a(a+k+1)(a+k)}=$$

$$\frac{ak+k^2+k+a}{a(a+k+1)(a+k)}=$$

$$\frac{(a+k)(k+1)}{a(a+k+1)(a+k)}=\frac{k+1}{a(a+k+1)}$$

Dakle, jednakost je ispunjena za $\forall a \in N \;\&\; \forall n \in N$.□

2. Odrediti onaj član binomnog razvoja $(2x^2-\frac{1}{2}y^3)^8$ koji sadrži x^8.

Rješenje:

$$\left(2x^2-\frac{1}{2}y^3\right)^8=\sum_{k=0}^{8}\binom{8}{k}\left(2x^2\right)^{8-k}\cdot\left(-\frac{1}{2}y^3\right)^k$$

$x^{2(8-k)}=x^8,\quad 16-2k=8 \;\Rightarrow\; k=4 \;\Rightarrow\;$ 5. član

$$\binom{8}{4}\left(2x^2\right)^{8-4}\cdot\left(-\frac{1}{2}y^3\right)^4=\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{1\cdot2\cdot3\cdot4}\left(2x^2\right)^4\left(-\frac{1}{2}\right)^4y^{12}=70x^8y^{12}$$ □

3. Dana je funkcija $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{e^{x-1}}-\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ -\frac{1}{2}, & x=0\end{cases}$.

Pokazati da je $\lim\limits_{x\to0}f(x)=-\frac{1}{2}$ i izračunati $f'(x)$.

Rješenje:

Primjenom L´Hospitalovog pravila dobivamo

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x-e^x+1}{xe^x-x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-e^x}{xe^x+e^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{-e^x}{xe^x+2e^x}=-\frac{1}{2}.$$

Po definiciji derivacije slijedi

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{h-e^h+1}{he^h-h}+\frac{1}{2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{h-2e^h+2+he^h}{2h^2\left(e^h-1\right)}=$$

$$=\cdots 3\times \text{ primijenimo L´Hospitalovo pravilo}\cdots=\frac{1}{12}\ \square$$

4. Ispitati funkciju $f(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}$ i nacrtati njen graf.

Rješenje:

a) Domena: $D=R\setminus\{0\}$

b) Parnost, neparnost: $f(x)\neq f(-x) \Rightarrow$ nije parna
$f(-x)\neq -f(x) \Rightarrow$ nije neparna

c) Nul točke: $y=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$

Presjeci s osi y: $x=0 \Rightarrow 0\notin D$

d) Ekstremi:

$$f'(x)=e^{\frac{1}{x}}-\frac{e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{2}+x\right)}{x^2},$$

$f'(x)=0 \quad \Rightarrow$ nema realnih rješenja
$\Rightarrow$ nema lokalnih ekstrema

$f'(x)>0 \quad \Rightarrow$ funkcija raste na cijeloj domeni.

e) Infleksija:

$$f''(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{2}+x\right)}{x^4} + \frac{2e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{2}x\right)}{x^2} - \frac{2e^{\frac{1}{x}}}{x^2} = \ldots = -\frac{e^{\frac{1}{x}}}{2x^4}$$

$f''(x) = 0 \qquad \Rightarrow$ nema realnih rješenja

$\Rightarrow$ nema točaka infleksije

f) Asimptote:

$$\lim_{x\to 0^-}\left(x-\frac{1}{2}\right)e^{\frac{1}{x}} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(x-\frac{1}{2}\right)e^{\frac{1}{x}} = -\infty$$

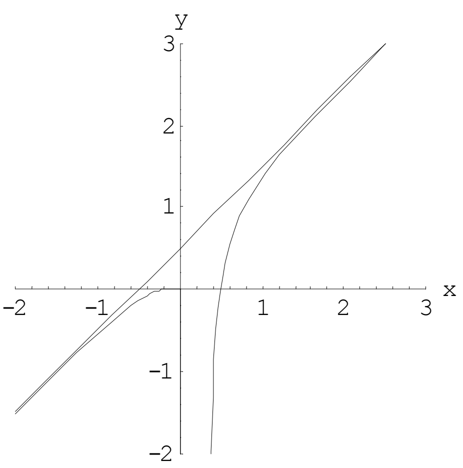
Vertikalna asimptota sdesna: $x = 0$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)}{x}e^{\frac{1}{x}} = 1 = k$$

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-kx] = \frac{1}{2} = l$$

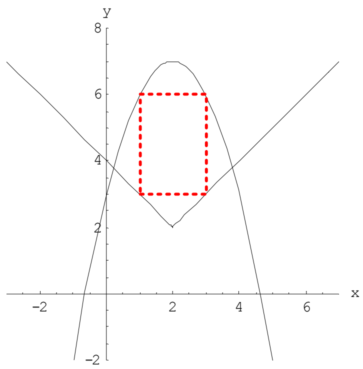
Kosa asimptota: $y = x + \frac{1}{2}$

g) Graf:



5. Odrediti koordinate vrhova pravokutnika maksimalne površine upisanog u figuru omeđenu krivuljama $y = |x-2| + 2$ i $y = -x^2 + 4x + 3$, tako da mu stranice budu paralelne s koordinatnim osima.

Rješenje:



$$P = 2a \cdot b$$
$$f_1(x) = x - 2$$
$$f_2(x) = -x + 2$$
$$\underline{f_3(x) = -x^2 + 4x + 3}$$

$$\frac{a}{2} = x - 2$$
$$\underline{b = f(x)_3 - f_1(x) = -x^2 + 4x + 3 - (x - 2)}$$

$$P(x) = 2(x-2)(-x^2 + 3x + 3)$$
$$P(x) = 2(-x^3 + 5x^2 - 3x - 6)$$
$$P'(x) = 2(-3x^2 + 10x - 3) = 0$$
$$3x^2 - 10x + 3 = 0 \Rightarrow x_1 = 3, x_2 = \frac{1}{3}$$

$$P''(x) = 2(-6x + 10)$$
$$P''(3) = -16 < 0 \Rightarrow P_{MAX}$$
$$P''\left(\frac{1}{3}\right) = 16 > 0 \Rightarrow P_{MIN}$$

$$P_{MAX} = 6 \,\square$$

6. Pokazati da se pravci $\frac{x-3}{5} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{4}$ i $\frac{x-8}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-6}{-2}$ sijeku i odrediti njihovo sjecište.

Rješenje:

$$p \ldots\ldots \frac{x-3}{5} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{4} \quad \Rightarrow \quad \vec{p} = \{5,2,4\}, \quad P(3,-1,2)$$
$$q \ldots\ldots \frac{x-8}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-6}{-2} \quad \Rightarrow \quad \vec{q} = \{3,1,-2\}, \quad Q(8,1,6)$$

Pravci se sijeku ako vektori $\vec{p}, \vec{q}$ i $\overrightarrow{PQ} = \{5,2,4\}$ leže u istoj ravnini i ako je $\vec{p} \neq \lambda\, \vec{q}, \quad \forall \lambda \in R$:

$$\{5,2,4\} \neq \lambda\ \{3,1,-2\} \quad \& \quad \begin{vmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{sijeku se}$$

Sjecište pravaca:

Promatramo pravce p i q u parametarskom obliku:

$$p\ldots\ldots \begin{array}{l} x = 3 + 5t \\ y = -1 + 2t \\ z = 2 + 4t \end{array} \qquad\qquad q\ldots\ldots \begin{array}{l} x = 8 + 3s \\ y = 1 + s \\ z = 6 - 2s \end{array}$$

Za neku vrijednost parametara t i s točka im je zajednička. Rješavamo stoga sustav jednadžbi:

$$\begin{array}{l} 3 + 5t = 8 + 3s \\ -1 + 2t = 1 + s \\ 2 + 4t = 6 - 2s \end{array}$$

Iz bilo kojih dviju jednadžbi slijedi $t = 1, \quad s = 0$. Budući da se pravci sijeku dobivene vrijednosti zadovoljavaju i treću jednadžbu.

Točka presjeka: $T(8,1,6)$. □